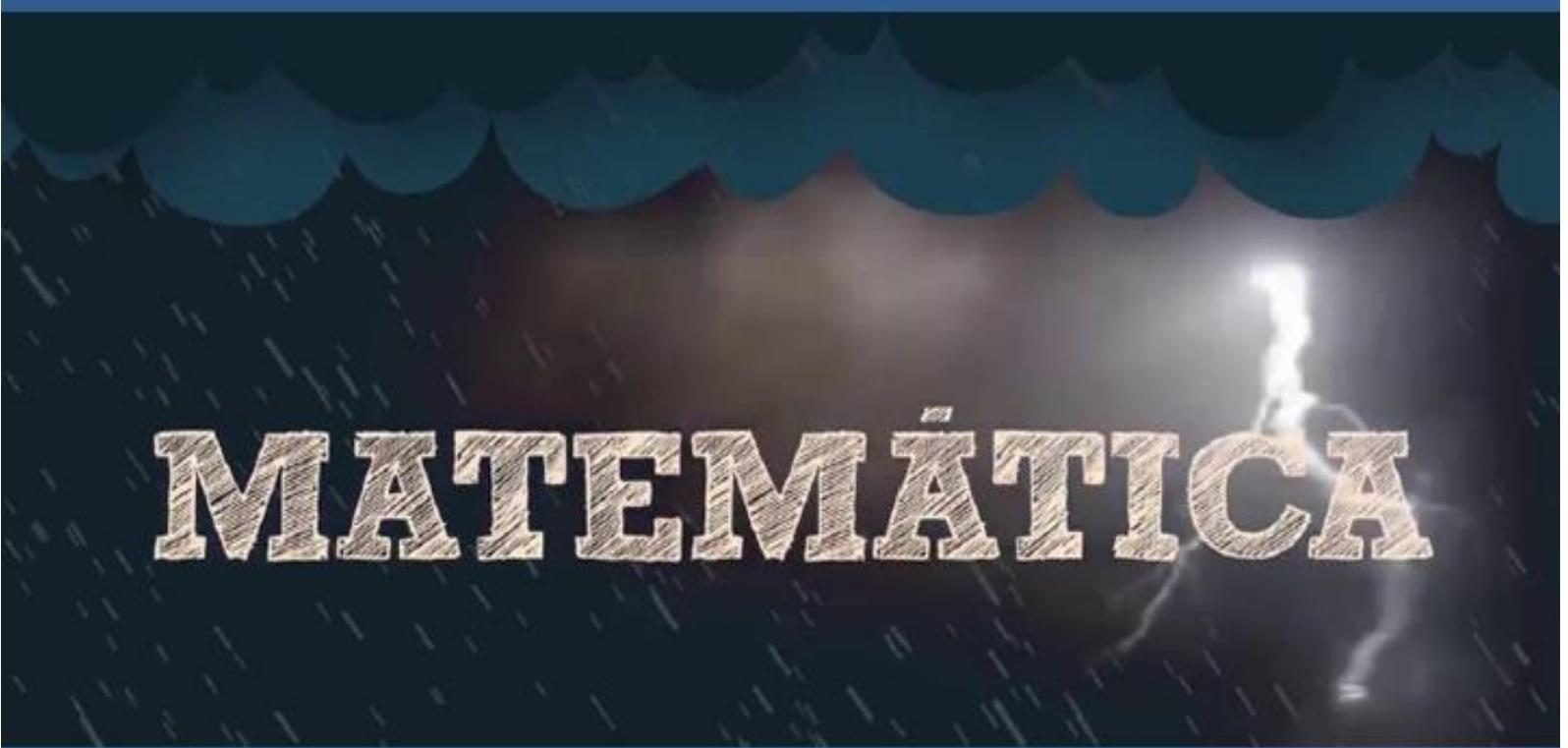


REEMA

Revista de Educação Matemática da UEG

ISSN 0000-0000



MATEMÁTICA



REEMA

Revista de Educação Matemática da UEG

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS

ISSN 0000-0000

v. 2, n. 1, p. 1-150, ago./dez., 2021

II ENLIM-Encontro das Licenciaturas em Matemática da UEG

Catálogo na Fonte
Comissão Técnica do Sistema Integrado de Bibliotecas Regionais (SIBRE)
Universidade Estadual de Goiás

R454 Revista de Educação Matemática da UEG (REEMA) / Universidade Estadual de Goiás. – Vol. 2, n. 1 (ago.-dez., 2021)-. – Cidade de Goiás, GO : UEG, 2022.
150 p.

Semestral

Anais do II Encontro das Licenciaturas em Matemática da UEG.

ISSN: 0000-0000

1. Educação matemática. 2. Ensino de matemática.
3. Aprendizagem de matemática. 4. Matemática e física. I. Título.
II. Universidade Estadual de Goiás.

CDU: 51:37

Elaborado por: Marília Linhares Dias – CRB1/2971

REEMA

Revista de Educação Matemática da UEG

Coordenador Editorial

Rodrigo Bastos Daude (UEG/Campus Cora Coralina)

Conselho Editorial

Ana Paula Purcina Baumann (UFG/Instituto de Matemática e Estatística)

Geraldo Eustáquio Moreira (UNB/Faculdade de Educação)

Luciano Feliciano de Lima (UEG/Campus Cora Coralina)

Maria Francisca da Cunha (UEG/Campus Morrinhos)

Roberto Barcelos Souza (UEG/Campus Quirinópolis)

Rodrigo Bastos Daude (UEG/Campus Cora Coralina)

Roseli Araújo Barros (UEG/Campus Jussara)

Saulo Henrique de Oliveira (UEG/Campus Iporá)

Pareceristas

Adriana de Oliveira Dias (UNEMAT/Campus Alto Araguaia)

Amabile Jeovana Neiris Mesquita (UEG/Campus Cora Coralina)

Ana Paula Alves Baleeiro (UEG/Aparecida de Goiânia)

Ana Paula de Almeida Saraiva Magalhães (UEG/UNUCET)

Ana Paula Purcina Baumann (UFG/Instituto de Matemática e Estatística)

Claudio Tavares Pinheiro (UEG/Campus Itapuranga)

Duelci Aparecido de Freitas Vaz (PUC-GO; IFG)

Eduardo Rodrigues da Cunha Guasco (UEG/Campus Cora Coralina)

Fernando Ribeiro Silva (UEG/Campus Cora Coralina)

José Elias Pinheiro Neto (UEG/Campus Itapuranga)

José Paulo Pietrafesa (UFG/Faculdade de Educação)

REEMA

Revista de Educação Matemática da UEG

Liliane Oliveira Souza (UEG/Campus Cora Coralina)

Elivanete Alves de Jesus (IFG/Ciência e Tecnologia de Goiás)

Marcos Antônio Gonçalves Júnior (UFG/ Centro de Ensino e Pesquisa aplicada à Educação-CEPAE)

Maria Francisca da Cunha (UEG/Campus Morrinhos)

Maria Marta da Silva (UEG/Campus Quirinópolis)

Marlene Araújo dos Santos (UEG/Campus Cora Coralina)

Moema Gomes Moraes (UFG/Centro de Ensino e Pesquisa aplicada à Educação-CEPAE)

Nilton Cesar Ferreira (IFG/Instituto Federal de Goiás)

Núbia Cristina dos Santos Lemes (UEG/Campus Iporá)

Paulo Henrique Alves Nascimento (UEG/Campus Cora Coralina)

Rejane de Souza Tiago (UEG/Campus Cora Coralina)

Roberto Barcelos Souza (UEG/Campus Quirinópolis)

Rosane Maria de Castilho (UEG/Campus Aparecida de Goiânia)

Rosemberg Pereira Serrano (UEG/ Campus Aparecida de Goiânia)

Thalitta Fernandes de Carvalho Peres (UEG/Campus Iporá)

Central de Relacionamento

Campus Cora Coralina-Sede Cidade de Goiás: Avenida Deusdete Ferreira de Moura, Centro, Goiás, Goiás – CEP 76000-000. Os direitos de publicação desta revista são da Universidade Estadual de Goiás.

REEMA

Revista de Educação Matemática da UEG

Os textos publicados nesta revista são de inteira responsabilidade de seus autores.

É permitido citar parte de artigos sem autorização prévia desde que seja identificada a fonte.

A reprodução total de artigos é proibida.

REVISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UEG – REEMA

Cidade de Goiás, v. 2, n. 1, p. 1-210, ago./dez., 2021

ISSN 0000-0000

Universidade Estadual de Goiás

<https://www.revista.ueg.br/index.php/reema>



SUMÁRIO

EXPEDIENTE p. 1-7

BRAÇO MECÂNICO: UM EXPERIMENTO À CONTEXTUALIZAÇÃO DA FÍSICA

p. 8-30

Wyliandriely Silva Almeida
Daniel Antonio Silva de Araujo
Matheus de Souza Amorim
Sara Vieira Lagares

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS APLICADA EM TEORIA DOS NÚMEROS NO CONTEÚDO DE DIVISIBILIDADE

p. 31-46

Amanda Fernandes Lacerda
Laryssa Caroline Mendes Oliveira

A PROPOSTA FORMATIVA DO CLUBE DE MATEMÁTICA VISTA A PARTIR DO PLANEJAMENTO DE UMA SDA PARA O CONCEITO DE EQUAÇÃO

p. 47-75

Janine Barbosa Lima Fransolin
Lukas Adriel Francisco Alves
Maria Marta da Silva
Paloma Aparecida do Nascimento
Wallace Yamamoto Garcia

DIFICULDADES NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA: qual é o "x" da questão?

p. 76-97

Eduardo José de Oliveira Estevão
Rinalde Silva Moura

SEQUÊNCIA DE FIBONACCI NO ENSINO DA MATEMÁTICA

p. 98-121

Rosane da Silva Rocha

REEMA

Revista de Educação Matemática da UEG

Rodrigo Bastos Daude

CLUBE DE MATEMÁTICA: A organização do ensino do conceito de números a partir de uma história virtual

p. 122-150

Lukas Adriel Francisco Alves

Maria Marta da Silva

Paloma Aparecida do Nascimento

Wallace Yamamoto Garcia

BRAÇO MECÂNICO: UM EXPERIMENTO À CONTEXTUALIZAÇÃO DA FÍSICA

MECHANICAL ARM: AN EXPERIMENT IN THE CONTEXTUALIZATION OF PHYSICS

Wyliandriely Silva Almeida¹
Daniel Antonio Silva de Araujo²
Matheus de Souza Amorim³
Sara Vieira Lagares⁴

Resumo

O presente trabalho traz algumas considerações sobre a importância do uso dos materiais concretos para o ensino de matemática e física buscando uma aprendizagem mais significativa. O objetivo deste é mostrar uma perspectiva diferenciada e contextualizada dessas disciplinas a partir do uso de um braço mecânico para o ensino do princípio de Pascal, que pode ser trabalhado em qualquer turma de segundo e terceiro ano do ensino médio. O material concreto ajuda desenvolver no aluno raciocínio lógico matemático, tornando mais fácil a visualização dos conceitos estudados. A ideia de apresentar uma metodologia que articulasse o uso do material concreto para o ensino de conceitos matemático, na intenção de contribuir na qualificação dos docentes pela apropriação das estratégias, que é o material concreto. Para isso foi realizado uma pesquisa de campo para o desenvolvimento da pesquisa permitindo assim visualizarmos o quanto trabalhar com materiais concretos fornece uma compreensão melhor para os alunos. O uso do material foi desenvolvido na sala de aula com o intuito de que possa intervir no processo de ensino e aprendizagem. Entendendo que este tipo de material pode propiciar aos alunos um interesse maior pelas aulas tornando-as mais prazerosas e interessantes. O braço mecânico permitiu investigar o processo de aprendizagem do aluno, através de testagem de hipóteses e da experimentação afim de que consigam entender os conceitos envolvidos. Por meio do uso do braço mecânico temos a finalidade de que o próprio aluno desenvolva o seu conhecimento possibilitando assim a melhoria da aprendizagem matemática e física.

Palavras chave: Materiais concretos. Contextualização. Prensa Hidráulica.

¹ Licenciado em Matemática pela UEG/Campus Cora Coralina: wyli15@hotmail.com

² Licenciado em Matemática pela UEG/Campus Cora Coralina:
danielantoniosilvadearaujo@gmail.com

³ Licenciado em Matemática pela UEG/Campus Cora Coralina: msamorim01@gmail.com

⁴ Licenciado em Matemática pela UEG/Campus Cora Coralina: saralagares04@gmail.com



Abstract

The present research brings some considerations about the importance of using concrete materials for teaching mathematics and physics seeking meaningful learning. The goal is to show a differentiated perspective for teaching these disciplines from the mechanical arm in teaching the Pascal principle, in the class of the second year "B" of the State College of Application Professor Manuel Caiado in the city of Goiás-GO. The concrete material helps to develop the mathematical logical reasoning making it easier to visualize the concepts studied. The guiding question that founded this research was, how can the use of the mechanical arm facilitate the teaching and learning of mathematics and physics? For this we conducted a field survey and the subjects involved are the students of the college mentioned above. The development of the field classes of this research included a qualitative and participating research. For classroom activity we elaborate a theoretical approach to the content of mathematics and physics, for later explanation of how the paschal principle is used and applied on the mechanical arm, in a way that the students can assimilate the concept with the concrete material. To deal with trends in mathematics teaching we used Fiorentini (1995), Cachapuz (2005) who contributed to think in a renewed teaching of science and Halliday; Resnick (2009) was an important support for the content of physics. The use of the material was developed in the classroom in order that it can intervene in the teaching and learning process. Understanding that this type of material can offer students a greater interest in the classes, making them more pleasant and interesting.

Key Words: Concrete materials. Contextualization. Hydraulic press.

Introdução

Essa proposta retrata uma pesquisa de caráter qualitativo sobre a utilização de materiais concretos no ensino e aprendizagem da matemática e física, com o intuito de que o material traga resultados satisfatórios para as aulas das respectivas disciplinas. Converte no sentido de buscar alternativas aos problemas educacionais de aprendizagem enfrentados em sala de aula pelos professores.

A aplicação do trabalho tem como finalidade tornar as aulas de matemática e física mais participativas, por meio do material concreto. Pensando assim podemos



modificar as situações das aulas que se dizem tradicionais⁵ para aulas diferenciadas e contextualizadas as quais os alunos não ficam apenas copiando do quadro.

O material utilizado para realização da investigação foi o braço mecânico hidráulico, o qual se aplica o mesmo princípio da prensa hidráulica que consiste em um dispositivo no qual a força aplicada em um êmbolo pequeno cria uma pressão que é transmitida através de um fluido até um êmbolo grande, originando uma força maior.

O funcionamento da prensa hidráulica baseia-se no princípio de Pascal, em que a pressão aplicada em qualquer ponto de um fluido, fechado em um recipiente, é transmitida igual em todas as direções.

O princípio da prensa hidráulica é exatamente utilizado em macacos de elevação, travões de veículos e prensas que usam geralmente óleo como fluido. A partir de exemplos de onde é usada a prensa hidráulica, tornaria a explicação mais compreensível para o entendimento dos alunos. Segundo Bandeira; C.F Silva; I.N Silva; Moura (2015), ao relacionar algumas práticas do cotidiano na sala de aula constatou a oportunidade de diálogo dos alunos sobre o conhecimento matemático a partir da representação do material concreto. Trabalhar esse conteúdo em sala de aula utilizando o braço mecânico facilitaria a visualização de como aplicar o princípio de pascal, fazendo desta forma aumentaríamos a relevância da proposta desse projeto, o que torna essencial a sua execução.

De forma geral essa é uma proposta de pesquisa que num primeiro momento é bibliográfica com base em Severino (2007) e envolve uma pesquisa de campo com aplicação de uma aula utilizando o material concreto para ensino do

⁵ Toda vez que esse trabalho mencionar as aulas diferenciadas está referindo-se na perspectiva do uso de material concreto, que se diferencia das aulas tradicionais criticadas por Freire (1996).



princípio da prensa hidráulica. Para entendermos esse movimento e avaliar a potencialidade da atividade pautamos na abordagem qualitativa por meio de levantamento de dados para compreender determinado comportamento como referência a análise do quadro de investigação proposto.

De certo modo podemos associar esse movimento de investigação com as características de uma pesquisa participante, numa perspectiva de que a pesquisa seja realizada através de uma construção de conhecimento de sujeito-sujeito, na qual o pesquisador siga um processo para entender o pesquisado. De acordo com Brandão (1981) pesquisa participante não é somente uma ferramenta de pesquisa, mas deve assumir como postura a compreensão de maneiras diferentes de se conceber o fazer científico.

Já o desenvolvimento das aulas de campo dessa pesquisa contemplou uma abordagem teórica do conteúdo de matemática e física, posteriormente a explicação de como seria usado e como é aplicado o princípio de Pascal no braço mecânico, numa perspectiva de que os alunos consigam assimilar o conceito com o material concreto. Fiorentini; Miorim (1990) assegura que todos os materiais têm como característica principal o fato de oferecer assistência aos alunos, a partir da manipulação, para entender melhor os conceitos importantes.

Apenas utilizar o material concreto por si só, não garante a aprendizagem do aluno, é necessário que o professor enquanto mediador torne as situações de experiências uma forma, mais fácil dos alunos entenderem os conceitos matemáticos, para uma posterior apresentação da experiência. Fiorentini; Miorim (1990) destaca que essa intenção reflete o entendimento para o aluno envolver-se, conforme foi citado acima, significa entrar em um estado em que ele mesmo experimenta, realiza e



descobre a Matemática, motivando-se, percebendo sua capacidade, seus limites, possibilidades.

Reflexão sobre o Ensino de Física e Matemática

O ensino de Matemática e Física vem sendo marcado por muitas dificuldades que as pessoas veem nessas duas disciplinas. De modo geral entendemos que na realidade podem ter sido ensinadas de forma imprópria por alguns professores. Esse tópico dedica a uma reflexão sobre o ensino de física e matemática, deixando explícito que a matemática e física está em todos os lugares e que essa dificuldade que as pessoas têm dessas matérias é apenas porque pode ter sido concebida de forma errada. Segundo D'Ambrósio (1996, p. 29):

Uma percepção da história da matemática é essencial em qualquer discussão sobre a matemática e o seu ensino. Ter uma ideia, embora imprecisa e incompleta, sobre por que e quando se resolveu levar o ensino da matemática a importância que se tem hoje são elementos fundamentais para se fazer qualquer proposta de inovação em educação matemática e educação geral.

Observe que a história da matemática é fundamental para perceber como teorias e práticas matemáticas foram criadas, e para tentarmos fazer qualquer proposta de intervenção na prática educativa é necessário sabermos da sua história. A matemática sempre esteve presente em nossas vidas, desde tempos antigos em que os homens viviam da caça e da pesca já utilizavam a Matemática. A mesma, até nos dias atuais vem sendo desenvolvida, de acordo com as mudanças que ocorreram e ainda continuam ocorrendo na sociedade a partir das necessidades surgidas pelo homem em função de sua sobrevivência no meio social.



Nos dias atuais, a matemática abrange um extenso campo de relações como, por exemplo, na física, engenharia mecânica e no setor da tecnologia, que despertam em nós curiosidades de sabermos o porquê determinada coisa acontece, sendo essas curiosidades favoráveis para construção do pensamento e do raciocínio lógico. Ela está presente na vida de todos, nas vivências mais simples, como comprar algo, contar e até mesmo no meio rural na agricultura. Por isso a capacidade de dominar os conhecimentos matemáticos do dia-a-dia é essencial para acabar com a crença na qual as pessoas pensam que não sabem matemática. A própria sociedade acredita que a matemática é apenas para pessoas inteligentes ou para apenas um grupo de pessoas restritas, outras têm em mente que a matemática é unicamente pura, exata, invencível e abstrata.

Mas na verdade, a matemática tem sim o seu lado abstrato, de modo que várias pessoas criam aversão, mas não é exatamente assim que deve ser vista. Existem formas de ensinar nas quais torna a compreensão mais fácil de ser visualizada e façam com que os alunos sintam prazer em estudá-las. A matemática e a física não são ciências imobilizadas. Não se deve acreditar que são disciplinas lineares, desligadas da realidade ou fechada. De fato, aprender matemática e física não é uma tarefa fácil, por esse motivo é preciso refletir sobre o método ensino mostrando cada vez mais a importância de aprender para o conhecimento do dia-a-dia. Assim o aluno precisa ser um sujeito participativo e crítico para que o processo de ensino e aprendizagem possa fluir espontaneamente.

É exatamente neste sentido que ensinar não se esgota no "tratamento" do objeto ou do conteúdo, superficialmente feito, mas se alonga à produção das condições em que aprender criticamente é possível. E essas condições implicam ou exigem a presença de



educadores e de educandos criadores, instigadores, inquietos, rigorosamente curiosos, humildes e persistentes. (FREIRE, 1996, p. 13)

A maneira em que a matemática e física são ensinadas é decisiva e de grande importância, desde o Ensino Fundamental a criança já fica com “medo” da matéria, e alguns professores tradicionais normalmente não buscam outros meios de ao menos tentar amenizar a dificuldade dos alunos que apresentam dúvidas de raciocínio matemático.

Mediar esse conhecimento de forma que o aluno compreenda os conceitos talvez seja o maior desafio de um professor, no entanto é possível se tornar um bom professor por meio da qualificação e dedicação, conhecendo os alunos e buscando formas de conduzir o conhecimento até os mesmos. Conduzir o saber matemático para um aluno é considerado uma tarefa difícil.

Nessa linha de raciocínio, na matéria de física é ainda mais complicada, porque além dominar as fórmulas matemáticas deverá entender os conceitos físicos envolvidos. Das diversas ferramentas disponíveis para ensinar a física é necessário sabermos como surgiu para estimular o desenvolvimento do senso crítico no estudante (CACHAPUZ *et al.*, 2005). Segundo Halliday; Resnick; Walker (2009) a física é definida como a ciência que estuda a natureza, ela procura relatar, justificar através de leis os fenômenos que acontecem no decorrer do tempo e do espaço em relação à matéria. Esses fenômenos naturais que a física busca estudar, estão presentes em todos os lugares, no nosso planeta e no nosso dia-a-dia. No questionamento desses fenômenos, a física utiliza o método científico buscando assim desenvolver uma experiência para uma melhor forma de elaborar conceitos. A física é dividida em vários ramos, e cada um associa o estudo dos fatos que são semelhantes e relacionadas a cada lei.



Ainda de acordo com Halliday; Resnick; Walker (2009) os ramos da física devem ser vistos para que seja possível entender cada conceito da física. Os tópicos da física são: Mecânica que estuda os movimentos dos corpos. Termologia cuida dos fenômenos relacionados ao calor e a temperatura. Óptica investigam os fenômenos ligados à luz. Ondulatória procura estudar os fenômenos relacionados a ondas e seus comportamentos e características. Eletricidade e Magnetismo estudam os fenômenos elétricos magnéticos. Percebemos que a disciplina da física é o estudo dos fenômenos e para entendermos melhor é necessário aplicar o conhecimento matemático e até mesmo usar recursos que são oferecidos somente pela matemática.

A física é dependente da matemática, porém não se resume a ela. A Matemática é “[...] dispensável metafisicamente [...]”, uma vez que suas associações se existirem, “[...] não desempenham qualquer função causal nos acontecimentos do mundo físico” (PINCOCK, 2007, p. 253). Diante disso uma vez que compreendermos a verdadeira essência da física será possível ter uma construção do conhecimento científico, que são ignorados com frequência no ensino.

Como já havia citado acima, há maneiras de o professor mostrar para o aluno que essas duas matérias não é um bicho de sete cabeças. Os professores que insistirem em apenas “depositar o conteúdo” na cabeça dos alunos e não buscar maneiras diferentes de ministrar a sua aula está fadado a ser dispensados pelos alunos e conseqüentemente farão que os alunos criem medo ou raiva da matéria. O papel do professor é tornar mais fácil o processo de aprendizagem e não transmitir o conhecimento, sendo esse tipo de professor mais conhecido como os que dão aulas tradicionais (FREIRE, 1996). Devido a isso é necessária uma investigação sobre os problemas do ensino tradicional e como podemos propor situações didáticas diferentes para minimizar os obstáculos



Um estudo sobre as tendências no ensino de Matemática

Para entender melhor, sobre a concepção de Matemática; como se dá o processo de alcance/produção/descoberta do conhecimento matemático; as finalidades e valores concedidos ao ensino da matemática; a concepção de ensino; concepção de aprendizagem; relação entre professor-aluno e especialmente, a perspectiva de estudo/ pesquisa com uma visão para melhoria do ensino da matemática; Fiorentini (1995) a partir da década de 1930 visualizou seis tendências para realização desse estudo. Sendo-as, a Formalista Clássica, Empírica-Ativista, Formalista Moderna, Tecnicista e suas variações, construtivista e a Socioetnoculturalista.

Para realização dessa pesquisa o destaque tem sido nas tendências empírico ativista e socioetnocultural, pois após analisar foi possível perceber que a melhor forma de colocar essa investigação em prática foi por meio dessas duas tendências. Fazendo uma ligação entre ambas, acreditamos que seja uma boa estratégia de ensino permitir ao aluno o direito de iniciativa e questionamento ao professor. Nessa perspectiva o ensino/aprendizagem partiria dos problemas da realidade dos alunos, de modo que não mais será centrada apenas no professor. Os alunos teriam o direito de montar grupos para trabalhar com jogos, materiais manipulativos em ambientes de ensino e de aprendizagem incentivos e estimulantes que estejam relacionados no seu dia-a-dia.

Essa pesquisa buscou deixar bem claro que o ensino de matemática não está somente ligado na memorização de fórmulas, definições e propriedades e sim na capacidade do professor de criar condições para que os alunos consigam compreender as ideias matemáticas, ou seja, os conceitos matemáticos atribuindo



significado a elas, e conseqüentemente os mesmos dariam conta de aplicar as relações matemáticas em situações do cotidiano. Essa forma contextualizada de ensino aprendizagem valoriza o aluno e a sua experiência sociocultural, destacando os conhecimentos obtidos durante o decorrer do seu amadurecimento. Na matemática, a contextualização é um recurso bastante útil, desde que seja usada uma perspectiva mais ampla e não de modo artificial e forçado, e que também não se restrinja somente no cotidiano do aluno. A justificativa que sustenta a contextualização e que ela vem para estimular, melhorar a criatividade do aluno e o seu espírito investigativo. Como o foco principal do trabalho está na contextualização do uso do braço mecânico não queremos afirmar que é possível contextualizar os conhecimentos matemáticos apenas com o uso desse material concreto a utilização desses materiais não cancela a importância dos outros métodos de ensino contextualizados, como o livro didático. Após fazer uma reflexão sobre o ensino de física e matemática foi possível apontar algumas mudanças de como o ensino de matemática e física foram realizados ao longo do tempo, de modo que as tendências propostas por Fiorentini (1995) conseguem caracterizar bem todas essas formas de ensinar as duas disciplinas. Apontamos que a contextualização e o uso do material concreto são elementos importantes para dar conta de suprir as visões equivocadas dessas tendências, no sentido caminhamos para pensar em um ensino renovado de ciência, na qual o aluno consiga através do material concreto entender os conceitos matemáticos, facilitando assim a sua aprendizagem. Nesse sentido a utilização do braço mecânico (material concreto) facilitou a visualização dos conceitos envolvidos, e pensando dessa forma, quando os alunos entendem os conceitos matemáticos que estão envolvidos em certa atividade torna mais fácil a compreensão e a visualização das formulas a serem utilizadas na disciplina de matemática.



Renovação no ensino de ciências

A proposta dessa maneira de ensino é ajudar escolas e professores a desenvolver sequências de ensino investigativo de modo a fugir do tradicionalismo, do uso excessivo do livro; lousa e partir da experimentação e da investigação de tal modo que os alunos e professores possam levantar hipóteses testá-las e comprová-las. A necessidade dessa forma de ensino de ciências⁶ na educação básica agrega as questões ligadas ao processo tecnológico e alfabetização científica. Pensando dessa forma percebemos a necessidade de que o ensino seja reformulado.

No ponto de vista de Cachapuz *et al.* (2005), para que haja alfabetização científica devemos fornecer aos estudantes conhecimentos científicos suficientes para que saibam interpretar fenômenos e resolver problemas relacionados à sua realidade. Para que essa ideia ocorra é fundamental que o currículo básico mínimo seja o mesmo para todos os estudantes, e assim evitar desigualdade no meio educativo. De acordo com Cachapuz *et al.* (2005) podemos identificar três pontos que são considerados elementos importantes para se pensar em alfabetização científica: o entendimento das relações entre ciência, tecnologia e sociedade que permite utilizar conhecimento da vida diária; a compreensão da natureza da ciência e seus fatores éticos e políticos e por último a compreensão básica de termos e conceitos científicos básicos fundamentais.

Desse modo, para alfabetizar cientificamente, é necessário não apenas fornecer conceitos e noções científicas, mas também é preciso que os alunos possam

⁶ Ao referir ao ensino de ciências estamos nos direcionando à proposta de Cachapuz (2005), que é pela renovação necessária do ensino de ciências. O termo ciência envolve as disciplinas de Matemática, física, química e biologia



“fazer ciência”, ao passo que os estudantes sejam confrontados com problemas nos quais visualize condições para resolvê-los. Para Cachapuz *et al.* (2005, p. 30)

[...] a aprendizagem das ciências pode e deve ser também uma aventura potenciadora do espírito crítico no sentido mais profundo: a aventura que supõe enfrentar problemas abertos, participar na tentativa de construção de soluções... [...] a aventura, em definitivo, de fazer ciência. O problema é que a natureza da ciência surge distorcida na educação científica, inclusivamente, na universitária. Apresenta a necessidade de superar visões deformadas e empobrecidas da ciência e tecnologia, socialmente aceites, que afectam os próprios professores.

Acrescentam Chaves; Shellard (2005) que hoje são reconhecidas as dificuldades de se realizar um bom ensino de ciências nas escolas, um ensino que integre ciência aos conhecimentos científicos, e que tais dificuldades vêm aumentando à medida que descemos no nível de escolaridade especialmente na disciplina de física. Os autores ainda continuam chamando atenção que o professor não deve dispensar de abordar conhecimentos/conteúdo de física, ou seja, o professor deve criar um ambiente de aprendizagem que aproxime os conhecimentos científicos do mundo vivenciados pelos estudantes. Desta forma não é apenas incluir os conceitos de física na matriz curricular mais é necessária uma mudança na prática pedagógica que permita aos alunos explorar tais acontecimentos e relacionar com conhecimentos da sua realidade cotidiana, fazendo assim com que o aluno estimule o seu raciocínio e busca discutir o porquê determinada coisa acontece na física.

Para que essa proposta de renovação no ensino de ciência seja alcançada é fundamental aperfeiçoar o atual ensino de ciências, não só em termos de mudança de conteúdo, mas, também exige mudança de estratégia de ensino. Cachapuz *et al.* (2005, p. 10), destaca que “[...] para uma renovação no ensino de ciências precisamos



não só de uma renovação epistemológica dos professores, mas que essa venha acompanhada por uma renovação didático-metodológica de suas aulas". Não é apenas ter um conhecimento científico, mas também é essencial que o professor tenha um posicionamento seguro com sua classe, passando para os alunos uma confiança do que estão fazendo, já que para um bom desenvolvimento é indispensável que o professor conheça o material didático para que os alunos se sintam a vontade e consigam criar uma investigação colaborando a tal renovação.

Para ocorrer à renovação do ensino de ciência Cachapuz *et al.* (2005) afirma que é importante superar e romper com as visões deformadas da ciência e da tecnologia, sendo essa superação um requisito essencial para que aconteça a renovação da educação científica. Nesse sentido convém discutir as deformações que devem ser rompidas para que haja uma renovação necessária. Neste trabalho, e por meio de Cachapuz *et al.* (2005), buscamos romper com a visão descontextualizada concepção individualista e elitista; concepção empírico-indutivista e ateórica; visão rígida, algorítmica, infalível; visão aproblemática e ahistórica; visão exclusivamente analítica; visão acumulativa, de crescimento lineal.

De acordo com Cachapuz *et al.* (2005) para que ocorra uma renovação científica é importante acabar com a descontextualização, ou seja, o ensino precisa ser contextualizado "[...] para conectar com a vida diária dos estudantes, para os familiarizar com o que supõe a concepção e realização prática de artefactos. (CACHAPUZ *et al.*, 2005, p. 42).

O ensino não pode ser individualista e elitista, isto quer dizer que a ciência não deve ser e não pode ser entendida que apenas uma pessoa pode fazê-la. Nesse sentido negamos qualquer posicionamento quando se trata do ensino empírico-indutivista e ateórico, isto é, os professores devem levar para sala de aula



experimentos tornando possível a percepção de que as experiências são importantes para a aprendizagem do aluno e as teorias também são de suma importância quando explicadas com um experimento, unindo sempre a teoria com a prática (CACHAPUZ *et al.*, 2005). Por meio de Cachapuz *et al.* (2005) entendemos que o ensino não pode ser rígido e nem visto como unicamente algorítmico em que se apoia numa visão em que estudantes e nem professores tenham ocasião para realizar experiências para surgimento de novas linhas de investigação.

Se admitirmos um ensino rígido admitiremos um conhecimento infalível, e nos devemos romper essa ideia, pois o ensino é falível e estamos sujeitos ao erro. Outra visão deformada da ciência é quando tratamos como aproblemático ou ahistórico, ou seja, o ensino deve procurar relacionar as dificuldades dos discentes na sua produção (CACHAPUZ *et al.*, 2005). Os alunos devem ter a oportunidade de perceber que os conhecimentos científicos possuem limitações, mas não está isento de problemática e história. De acordo com Cachapuz *et al.* (2005) o ensino não deve ser exclusivamente analítico, ou seja, não deve ser pautada na simplificação e no controle rigoroso de condições preestabelecidas que afasta o processo científico da realidade. E assim, afastamos qualquer possibilidade de ser acumulativo e linear, ou seja, a ciência não pode ser desenvolvida linearmente através da acumulação de conhecimento.

Para que ocorra um processo de renovação é importante que essas deformações sejam rompidas ou no mínimo discutidas, Cachapuz *et al.* (2005) nos orienta a partir de uma problematização, levantamento de hipóteses (no nosso caso foi aplicada na fase experimental) podemos levar os alunos na análise e interpretação dos dados e em fim chegar a uma conclusão.



Buscando na empiria uma renovação do ensino de ciência

A proposta ocorreu na turma do 2º B do ensino médio do Colégio Estadual de aplicação Professor Manuel Caiado, Cidade de Goiás-GO entre os meses de junho e outubro de 2019 e foi dividida em três momentos.

No primeiro momento foi aplicado um questionário inicial para conhecer os alunos, com perguntas pessoais e conteúdo de física envolvendo o princípio de Pascal. De 28 alunos, apenas 18 estavam presentes no dia 20 de junho de 2019. Para preservar a identidade dos sujeitos participantes optamos por usar codinome, de A1 até A18.

O segundo momento foi dedicado para realização da aula de campo o qual foi explicado o princípio de Pascal, abrindo um momento de tirar dúvidas caso os alunos tivessem, e posteriormente apresentamos o material concreto e deixamos os discentes a vontade para se envolverem com o braço mecânico.

O terceiro e último momento, ao final da aula de campo foi à aplicação do questionário final com a finalidade de avaliar nosso próprio movimento de pesquisa e de que modo às respostas do questionário inicial, apresentam agora resultados satisfatórios.

Análise do questionário inicial

As respostas ao questionário inicial nos permite dizer no primeiro momento de que essa alfabetização científica está longe de acontecer com esses sujeitos que foram pesquisados. Observe que ao serem questionados se no seu dia dia sabiam reconhecer densidade hidrostática e pressão hidrostática, 18 alunos equivalente a 100% dos sujeitos disseram que não. Conforme ilustrado nas figuras 1 e 2:



Figura 1- Relação da pressão hidrostática no seu dia-dia



Fonte: Autora com dados retirados do questionários inicial

Figura 2- Relação da densidade hidrostática no seu dia-dia



Fonte: Autora com dados retirados do questionários inicial

As figuras 1 e 2 ilustram um fator comprometedor quando o assunto é a relação de conteúdos com o dia dia dos alunos. De modo geral foi possível perceber que 100% dos alunos, não souberam relacionar a pressão hidrostática e densidade hidrostática com algum acontecimento do seu dia dia.

Isso talvez possa acontecer devido ao acúmulo das visões deformadas citadas por Cachapuz *et al.* (2005). Como a execução dessa pesquisa implica em uma alfabetização científica e uma renovação científica, devemos romper com as visões deformadas, ou seja, com a visão descontextualizada, individualista e elitista; empírico-indutivista e ateórica; visão rígida, algorítmica, infalível; visão aproblemática e ahistórica; visão exclusivamente analítica e por último a visão acumulativa, de crescimento linear. (CACHAPUZ *et al.*, 2005)

Da teoria à prática: utilização do braço mecânico

A aula prática aconteceu de acordo com o planejamento, levando para os alunos primeiro a teoria para depois aplicar a prática. Ao explicar a teoria dos conceitos de hidrostática, densidade hidrostática, pressão hidrostática e princípio de Pascal nas quais eram conceitos que estavam envolvidos nos materiais, sempre buscava fazer uma correlação com algum exemplo do dia-dia dos discentes, envolvendo-os em cada explicação, perguntando se sabiam outro exemplo que se encaixava naquele determinado conceito. Buscando sempre deixar claro para os alunos que o ensino não está centrado em apenas aprender as fórmulas, mais sim em entender os conceitos envolvidos, ou seja, por meio de Cachapuz *et al.* (2005) entendemos que o ensino não pode ser rígido e nem visto como unicamente



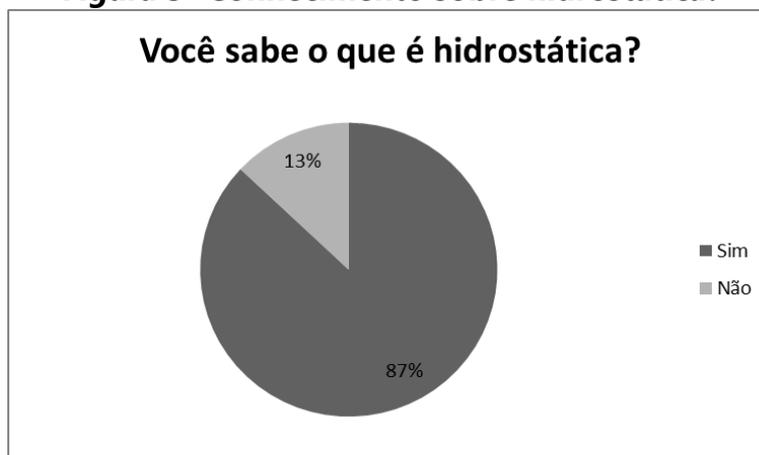
algorítmico em que se apoia numa visão em que estudantes e nem professores tenham ocasião para realizar experiências para surgimento de novas linhas de investigação. A explicação do conteúdo aconteceu durante primeira aula.

Análise do questionário final

O objetivo do questionário final foi estabelecer uma base de como o braço mecânico contribuiu para a aprendizagem dos alunos. De modo geral os resultados do questionário final foram os esperados, conforme podemos verificar a partir da figura 3.

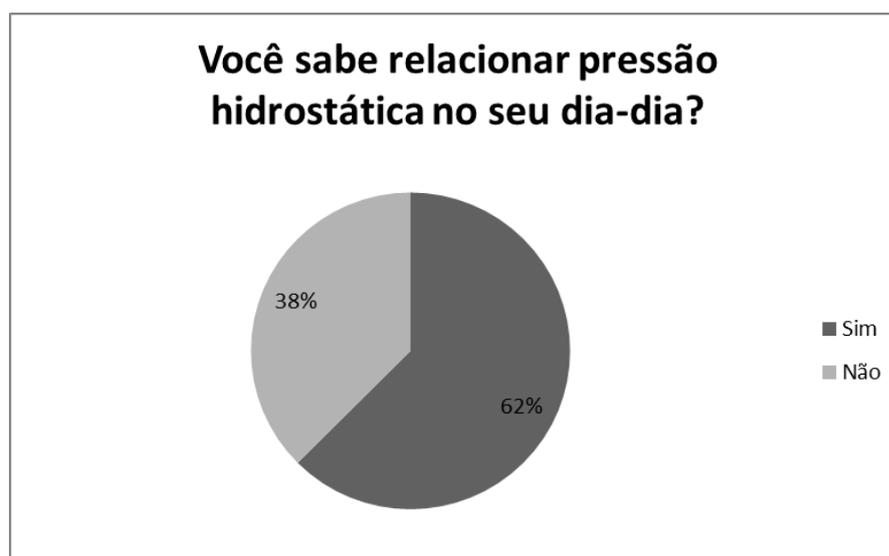
De acordo com a figura 3, podemos perceber a diferença das respostas obtidas no questionário inicial. Quando questionados se sabiam sobre o que é densidade hidrostática (Figura 1 e Figura 2), na qual envolve conceitos de hidrostática, 100% dos alunos responderam que não sabiam. Após a aula teórica juntamente com a prática, quando perguntados no questionário final se sabiam o que era hidrostática, 87% correspondentes a 14 alunos, responderam que sabiam. Nesse mesmo sentido os resultados foram satisfatórios quando indagados se sabiam relacionar pressão hidrostática no dia-dia, como segue a figura 4.

Figura 3- Conhecimento sobre hidrostática?



Fonte: Autora com dados retirados do questionário final

Figura 4- Relação da pressão hidrostática no seu dia-dia?



Fonte: Autora com dados retirados do questionário final

Na figura 4, diferentemente do questionário inicial, o qual obtivemos 100% de respostas negativas, no questionário final atingimos através do ensino renovado de ciência e da alfabetização científica que 62% do total, conseguissem relacionar a pressão hidrostática no seu dia-dia. Através da figura 4, podemos afirmar que houve o rompimento da descontextualização e colocamos em prática a contextualização. O que de acordo com Cachapuz *et al.* (2005) para que ocorra uma renovação científica é importante acabar com a descontextualização, ou seja, o ensino precisa ser contextualizado “[...] para conectar com a vida diária dos estudantes, para os familiarizar com o que supõe a concepção e realização prática.” (CACHAPUZ *et al.*, 2005, p. 42). E por intermédio da contextualização os alunos conseguiram entender

os conceitos e relacionar com alguma experiência do seu dia-dia, tornando os resultados negativos em resultados satisfatórios.

Algumas considerações

O material utilizado para realização da pesquisa foi o braço mecânico hidráulico, o qual aplica o mesmo princípio da prensa hidráulica. A realização da pesquisa aconteceu da maneira esperada tornando-a satisfatória o seu desenvolvimento e assim foi possível perceber que o tema que envolveu a pesquisa foi proveitoso também para os discentes. Foi relevante fazer esse movimento de teoria e prática conseguindo levar para os alunos a importância de alguns conceitos físicos, mostrando para os mesmos que o conhecimento do cotidiano está ligado com grande parte dos conceitos da física. E a partir dessa pesquisa investigativa foi possível abrir novas perspectivas para conseguirmos levar aos alunos um ensino renovado de ciência e uma alfabetização científica.

De modo geral refletimos sobre as tendências do ensino de matemática e física, citado por Fiorentini (1995) na qual foi possível visualizar recursos estratégicos com a intenção de minimizar alguns obstáculos vistos no ensino tradicional. A pesquisa se fundamentou em duas tendências, na empírico ativista e na socioetnocultural de Fiorentini (1995), o que nos permitiu entender que as características tanto biológicas quanto psicológicas e cultural dos alunos deveriam ser levadas em consideração na realização da pesquisa. Justificamos isso porque os alunos tiveram o direito de pensar, perguntar sobre o material concreto, quebrando a ideia do ensino tradicional onde o aluno não se envolveria na aula.



Com a finalidade de levar o material concreto para tornar a aula mais produtiva, a tendência empírico ativista de Fiorentini (1995) colaborou para que a pesquisa conseguisse atingir seu propósito, ou seja, os materiais manipulativos experimentais permitiram aos alunos não só tomar contato com noções já sabidas, mas descobrir novas perspectivas.

Cachapuz *et al.* (2005) apresentou que o ensino de matemática e física, ou seja, o ensino de ciência, deve buscar romper algumas visões distorcidas. E durante a exposição da aula bem como na análise do questionário final houve o rompimento das concepções de descontextualização, concepção empírico-indutivista e atórica; visão rígida, algorítmica, infalível; visão aproblemática e ahistórica. A aula foi desenvolvida no sentido de romper com as visões deformadas que Cachapuz *et al.* (2005) citam, e assim acreditamos ter feito.

O questionário final nos permitiu visualizar que os resultados após a aula com a utilização do material concreto foram relevantes para os alunos, pois mais de 50% dos alunos conseguiram responder o questionário final de forma esperada. A aula buscou envolver os discentes para que pudesse ter uma aula diferenciada através experimento à contextualização da física.

De acordo com algumas considerações, os alunos deixaram claro que a aula de física com a utilização do braço mecânico foi de alguma forma contributiva, na qual todos os alunos se envolveram na aula. Podemos concluir que essa pesquisa contribuiu para a aprendizagem dos alunos e para melhoria do ensino de matemática e física desmistificando que as aulas dessas disciplinas podem acontecer apenas de forma tradicional. Ademais a pesquisa convergiu romper com as visões deformadas do ensino de ciência, fazendo com que conseguíssemos levar aos alunos uma alfabetização científica de modo a fornecer aos alunos conhecimentos científicos



suficientes para os alunos entendessem os conceitos e conseguissem relacionar com algo do seu cotidiano.

São esses motivos acima listados que admitimos que pesquisa conseguiu atingir o seu objetivo de mostrar uma perspectiva diferenciada para ensino das disciplinas de matemática e física a partir do braço mecânico para o ensino do princípio de Pascal.

O braço mecânico facilitou o ensino e aprendizagem de matemática e física, através da associação da teoria e da prática, da contextualização e da dinamicidade. Em que os alunos conseguiram da melhor forma entender os conceitos que o braço mecânico envolvia através do elo entre a teoria/prática e da contextualização que teve por finalidade estabelecer sentido, possibilitando aos alunos entender os conceitos com mais significado. O braço mecânico também trouxe a dinamicidade de trabalhar o conteúdo.

Essa pesquisa fica em aberto para os professores de ensino médio que tem o intuito de trabalhar em sua sala de aula o princípio de Pascal, levando em consideração que essa pesquisa pode ajudar a melhorar a prática educacional do professor e também o ensino e aprendizado dos alunos, tornando uma aula tradicional em uma aula diferenciada e dinâmica prazerosa de ser desenvolvida.

Referências

BRANDÃO, C. R. **Pesquisa participante**. 2 ed. São Paulo: Brasiliense, 1981

BANDEIRA, R.S; *et al.* Contextualização e utilização de material concreto no ensino da matemática: uma ação do pibid por meio do simulado de compra e venda. In: CONGRESSO NACIONAL DA EDUCAÇÃO. Universidade Estadual de Paraíba. 2015.

Disponível em:

http://www.editorarealize.com.br/revistas/conedu/trabalhos/TRABALHO_EV045_MD1_SA8_ID875_08092015192248.pdf. Acesso em: 05 jan. 2019.



CACHAPUZ, A, *et al.* **A necessária renovação do ensino das ciências.** Cortez. São Paulo: 2005.

CHAVES, A; SHELLARD, R.C **Física para o Brasil: pensando o futuro.** 2005, Projeto de Pesquisa, UFMG/PUCRJ. São Paulo: Sociedade Brasileira de Física. Disponível em: http://www.sbfisica.org.br/v1/arquivos_diversos/publicacoes/FisicaBrasil_Dez05.pdf. Acesso em: 20 fev. 2019

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática da teoria a prática.** 23 ed. Campinas, SP: Papirus, 1996.

FIORENTINI, D; MIORIM, M.A. **Uma reflexão sobre o uso dos materiais concretos e jogos no ensino da matemática.** In: Boletim SBEM-SP, 4(7): 5-10, 1990. Disponível em: http://www.pucrs.br/ciencias/viali/tic_literatura/jogos/Fiorentini_Miorin.pdf. Acesso em: 07 jan.2019.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino de Matemática no Brasil. **Revista Zetetikê**, Ano 3, n. 4, Unicamp, Campinas / São Paulo: 1995, p. 1-35.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia: saberes a prática educativa.** São Paulo: Paz e terra, 1996. Disponível em: <http://forumeja.org.br/files/Autonomia.pdf>. Acesso em: 22 fev. 2019

HALLIDAY D.; RESNICK R. e WALKER J. **Fundamentos de Física:** mecânica. Volume 1. 8. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2009.

PINCOCK, C. **Um papel para a matemática nas ciências físicas.** 2007. Projeto de pesquisa- Universidade de Purdue. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1468-0068.2007.00646.x>.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do trabalho científico.** São Paulo: Cortez, 2007.

Recebido em: 09/10/2021.

Aprovado em: 04/05/2022.



A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS APLICADA EM TEORIA DOS NÚMEROS NO CONTEÚDO DE DIVISIBILIDADE

PROBLEM SOLVING APPLIED IN NUMBER THEORY IN THE CONTENT OF DIVISIBILITY

Amanda Fernandes Lacerda⁷

Laryssa Caroline Mendes Oliveira⁸.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo mostrar crucialmente a maneira de como a educação, em especial a matemática, se evoluiu em termos de métodos de aprendizagem ao longo do tempo, conforme o alvará das respectivas sociedades. Dentre os métodos que foram abordados no trabalho, destaca-se a Resolução de Problemas, embasado pelas perspectivas de Polya e Allevato, uma ferramenta poderosa para a evolução e estabelecimento do saber, do raciocínio, autonomia e investigação do discente. A metodologia utilizada foi a qualitativa com revisão bibliográfica, e os resultados mostraram a importância da resolução de problemas para o entendimento da divisibilidade e também de outros conceitos trabalhados em matemática.

Palavras-chave: Resolução de problemas. Teoria dos Números. Divisibilidade.

Abstract

This work aims to show crucially the way in which education, especially mathematics, has evolved in terms of learning methods over time, according to the charter of the respective societies. Among the methods that were addressed in the work, Problem Solving stands out, based on the perspectives of Polya and Allevato, a powerful tool for the evolution and establishment of knowledge, reasoning, autonomy and student investigation. The methodology used was qualitative with a literature review, and the results showed the

⁷ Graduanda em Matemática Licenciatura pela Universidade estadual de Goiás (UEG).

⁸ Graduanda em Matemática Licenciatura pela Universidade estadual de Goiás (UEG).



importance of problem solving for the understanding of divisibility and also of other concepts worked on in mathematics.

Keywords: Problem solving. Number Theory. Divisibility.

Introdução

Como se sabe, o ensino da matemática é simples para uma minoria, com apuração de um grupo selecionado, por meio da capacidade de desenvolver o raciocínio matemático, interpretar situações, e o principal, encontrar o “x” da questão.

De fato, essas capacidades deveriam ser desenvolvidas como um todo na formação do educando, conforme destaca Delors (2004), os sistemas educativos devem dar resposta a múltiplos desafios, na perspectiva do fortalecimento contínuo dos saberes e do exercício de uma cidadania, perfazendo as demandas de cada época.

Por muito tempo, tanto no ensino básico, quanto no ensino superior, os componentes curriculares prezam o centro do aprendizado por meio da valorização do resultado do problema, deixando à mercê as possibilidades diferenciadas para o aluno chegar ao resultado, por sua vez, descartando ou ignorando maneiras como a resolução por meio do seu repertório cultural, desenhos, e/ou cálculos com fórmulas que não estão presentes no conteúdo atual estudado, assim como Norma Allevato (2013) defende na palestra ministrada na Universidade Federal de Uberlândia.

Em análise sobre o meio acadêmico, é possível notar a importância de Teoria dos Números por meio dos problemas, conforme destacado na dissertação de Junior



(2013), a existência de um potencial motivador no processo de ensino aprendizagem, por carregar a contextualização e possibilitar maior elaboração de atividades didáticas, com o intuito de desafiar os alunos, consolidar o aprendizado com o conceito de divisibilidade além de promoverem o pensamento conceitual algébrico, apesar de carregar lacunas do desenvolvimento básico.

Nesse sentido, com a intenção de fugir do método da repetição, memorização e treino, como aborda Patruni (2019), o sistema adotado desde o princípio do século XX até metade deste século, consegue abrir os olhos para a resolução de problemas, focada no aluno como centro do processo de ensino, sendo investigador, e o professor, como observador e agente mediador de ações e conjecturas encontradas pelos discentes.

Portanto, é notório que para mudar a realidade do ensino de matemática, é necessário adotar metodologias significativas ou recursos norteadores que sejam capazes de promover a criatividade, investigação, empenho, motivação e o raciocínio matemático. Nesse sentido, atenta-se ao uso da resolução de problemas no contexto da disciplina Teoria dos Números, com enfoque no componente curricular: Divisibilidade.



Referencial Teórico

O ensino da matemática

A educação, de modo geral, sempre se fundamentou nas perspectivas de ensino da sociedade de cada época, assim como traz a frase seguinte:

[...] o trabalho com Educação, atualmente, tem exigido uma postura tal de seus profissionais que todas as alternativas de práticas pedagógicas implementadas e as novas abordagens que se têm experimentado representam mais tentativas de acompanhar o dinamismo da sociedade atual, do que soluções ou encaminhamentos duradouros e definitivos. (ALLEVATO, 2014, p. 210).

Nesse sentido, o ensino da matemática segue esse mesmo viés de modelamento, ou seja, conforme o alvará dado pela sociedade.

De fato, este modelo que persistiu por muito tempo e ainda possui vestígios nos dias de hoje se dá pelo tradicional, originado no século XVIII, uma forma que se consolida no professor como o detentor e transmissor do saber, e o aluno como o receptor desse conhecimento. (LEÃO, 2010).

Por conseguinte, tal modelo foi muito criticado por diversos historiadores, sociólogos e estudantes da educação, por não serem coniventes com a situação de se aprender “calado”, por meio de repetições e sempre na “mesmice”, e em destaque, pela forma de acumulação e retenção de conceitos. Desse modo, surgiram outros modelos recorrentes deste, como o de Paulo Freire, Montessori, e tendências



pedagógicas como as que se subdividem em liberais e progressistas, simplesmente pelo fato da sociedade exigir essa mudança na educação cada vez mais.

A Educação Matemática está modelada para produzir conhecimento matemático apropriado, com compreensão e habilidades para diferentes populações de estudantes. A emergência de uma economia mundial altamente competitiva e tecnológica tem, fundamentalmente, ampliado as demandas da Educação Matemática. Essas mesmas mudanças têm feito crescer as demandas de uma alfabetização matemática para a participação responsável e informada de uma sociedade moderna democrática. (ONUCHIC, 2013, p. 91).

Portanto, estes sistemas por sua vez, buscam e se fundamentam na concepção de formar o aluno para a vida em sociedade, para possível prosseguimento dos estudos, se tornar um cidadão crítico e investigador, e, principalmente, um ser autônomo na sua forma de pensar para estabelecer estratégias em qualquer âmbito de conhecimento.

Conforme a Base Nacional Comum Curricular, deve existir a formação integral do aluno. Neste mesmo entendimento, Junior (2013) declara que é necessário adotar situações problemas que desafiam desde o Ensino Fundamental em auxílio do processo de abstração, retomando ao letramento algébrico, em expressar seu raciocínio por meio de símbolos (letras, incógnitas, variáveis, números e constantes), e então, aplicar o conhecimento matemático para solucionar os problemas.

Logo, mesmo que o ensino no campo da matemática viva em detrimento das configurações citadas, há diversos autores, professores, alunos, pais e responsáveis que vêm lutando para a mudança de paradigma de que o aluno pode aprender por meio do processo, e não somente da resposta pronta e acabada, assim como pode desenvolver saberes para a vida em sociedade e por meio dela, pois como afirma



Allevato (2013) aspectos como criatividade, habilidade para trabalhar em equipe, naturalidade no enfrentamento de novos problemas, autodidatismo, autonomia intelectual, entre outros, vêm sendo apontados para as novas exigências na educação matemática.

Resolução de problemas

Em decorrência do Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), a Educação tem lutado por mudanças curriculares, mas ainda não atingiu a força necessária para alterar algumas práticas docentes. Logo, a matemática ainda é marcada pelo seu ensino de formalização de conceitos e formas mecânicas.

Alguns autores como Polya (2011) e Allevato (2013), descrevem os passos para se aplicar na resolução de problemas, como ponto de partida das atividades matemáticas, além de discutir os caminhos para se fazer matemática em sala de aula, no mais, um laboratório de investigação.

Para Polya (1995, p. 12):

A Resolução de Problemas apresenta um conjunto de quatro fases: 1º Compreender o problema; 2º Elaborar um plano; 3º Executar um plano; 4º Fazer o retrospecto ou verificação (serve para despertar e corrigir possíveis enganos).

Desse modo, as fases de Polya consistem em resolver um problema com o objetivo de encontrar o percurso que ainda não é conhecido, além de contornar



obstáculos para alcançar o objetivo traçado, por meios adequados, atentando às condições de estudo dos alunos. (PONTES, 2019).

Por meio da experiência de Patrini (2018) ao usar o método de Polya, enfatiza no seu texto “O ensino da matemática através da resolução de problemas que:

Durante a realização do meu estágio e pesquisa, minha maior dificuldade foi em relação à falta de compreensão por parte dos alunos, diante da leitura das atividades propostas, pois os mesmos decodificaram os símbolos e os códigos, mas não conseguiam entender o que diziam os enunciados (PATRINI, p. 176, 2018).

Sobre a fala da autora, o processo de ensino e aprendizagem persiste em compreender os dados de um problema; tomar decisões para resolvê-lo; estabelecer relações; saber comunicar resultados; ser capaz de usar técnicas já aprendidas. Baseado na dificuldade obtida na a realização do estágio e pesquisa, para Lester (1994) é possível encontrar três razões pela qual os estudantes não conseguem resolver problemas, sendo elas: a resolução de problemas se torna uma atividade intelectual meramente complexa; há falta de saber para aplicar na resolução de problemas; são poucas atividades que oportuniza aos alunos de envolver com a resolução de problemas.

Percebe-se que, por mais que as instituições cobrem uma bagagem maior de conhecimento, os alunos não sabem da sua aplicabilidade, não carregam a construção do conceito. Visto que, o aprendizado narra “um pronto e acabado”, principalmente na disciplina de matemática.

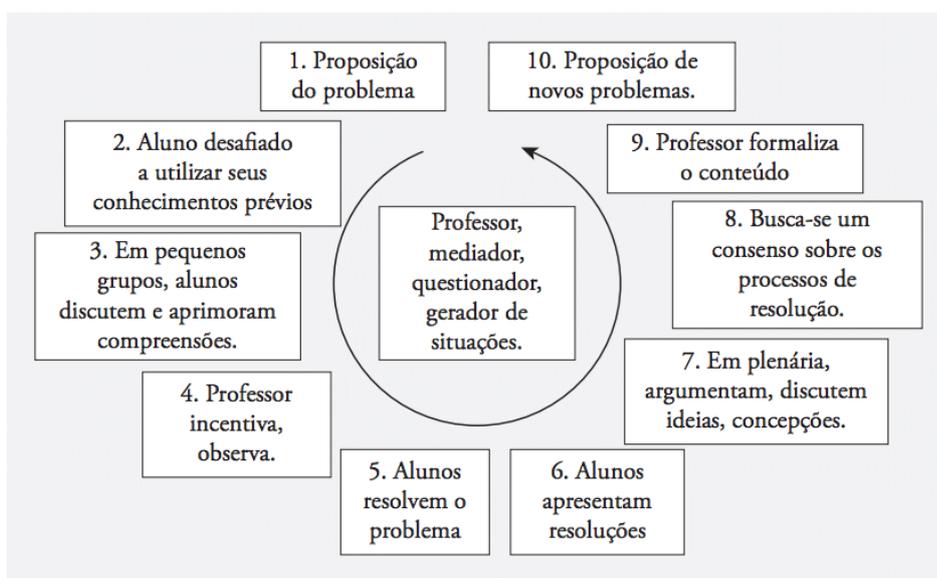


Logo, é preciso criar ambientes instigadores para o ensino de matemática, de forma que os alunos possam produzir matemática e compreender todo o processo de construção dos conceitos matemáticos. (SILVA *et al.*, 2017).

Convém lembrar que, o currículo de matemática na educação básica deve estar adequado com as exigências do século atual, ainda assim, com o meio tecnológico, a utilização de resolução de problemas, desde as séries iniciais da educação básica, a fim de promover papel fundamental no processo de ensino e aprendizagem de matemática, pois induzirá a criança a pensar, calcular e tomar decisões. (PONTES, 2019).

Seguido os passos de Polya (2011) e as instruções de Norma Allevato (2013) o diferencial de usar a resolução de problemas antes de adentrar o conteúdo, fazendo a construção do conceito por meio da solução de um problema, é importante e pode ser realizado conforme mostra a Figura 1 a seguir.

Figura 1- Instruções para resolução de problemas



Fonte: Alleinato & Vieira (2016).

Em função do quadro acima, Cidimar Andreatta (2020), fez uma pesquisa de doutorado com objetivo de investigar como se dá o processo de aprendizagem dos alunos em uma escola de comunidade rural, aplicando a resolução e elaboração de problemas.

À princípio, foi proposto um problema envolvendo as sacas de café, este que perfaz o cotidiano dos alunos, oportunizando sentido, capaz de despertar indagações, e não conduz a uma resposta direta.

É válido reafirmar o tipo de problema proposto, ao passo que diferenciar de um exercício, como pontua Maia e Proença (2016), é uma das práticas simplórias, mas que causam dificuldade para o professor. De certo, o problema deve constituir um desafio em que os alunos, capazes de propiciar uma sequência de ações, e então, vão em busca de obter os resultados.

Contudo, são perceptíveis a liberdade e a criatividade que o professor dá aos discentes quando vão resolver os problemas, criar suas hipóteses, contestar uma afirmação ou outra, sendo capaz de chegar no resultado e entender todo processo. Além disso, reformular outros problemas e ver sua aplicabilidade no dia a dia, de certa forma, se quebra a ideia de abstração e exclusão dotada em matemática.

Teoria dos Números



“A matemática é a rainha das ciências, e a teoria dos números é a rainha da matemática”.

Carl Friedrich Gauss

Em consonância com o método de ensino por meio da resolução de problemas, é notório que a teoria dos números, sendo a área na qual se estudam as propriedades e as relações entre os números, Junior (2013), traz em seu modelo de estudo uma pauta consolidada em provações.

Todavia, ela amplia e valida essas provações aos mecanismos e vertentes considerados não conceituais, que possam tornar a tese verdadeira, ou seja, ela não estabelece apenas o meio dos conceitos, mas também acata o pensamento por esses outros meios de quem o resolve, algo embasado e de extrema pertinência no ramo da resolução de problemas.

Prova disso, Junior (2013) faz um trabalho de suma importância, tendo como objetivo rever e mostrar aos professores de Matemática que atuam na Educação Básica, a pertinência dos conceitos relacionados à Teoria dos Números como ferramentas na resolução de diversas situações problemas que envolvem a divisibilidade.

O tema de divisibilidade carrega consigo o desenvolvimento do raciocínio lógico, de forma que estimule os alunos a ter interesse em matemática, refine o pensamento aritmético, e desenvolva a capacidade de manipular conceitos e propriedades dos números inteiros de maneira clara e objetiva. (BERTONE, 2014).



Em complementação ao trabalho de Junior (2013), segue abaixo um exercício de teoria dos números retirado da tese de doutorado de Reis (2014, p. 25), que pode ser encarado como um problema, adequado aos passos de Polya.

Questão: Nas turmas de sextos anos de uma escola há 198 alunos, e nos sétimos anos há 189 alunos. Para realizar um trabalho comunitário, os alunos serão organizados em grupos do maior tamanho possível, todos com o mesmo número de alunos e sem que se misturem alunos de anos diferentes.

- a) Qual é o número máximo de alunos que pode haver em cada grupo?
- b) Nesse caso, quantos grupos serão formados em cada ano?

Nesse caso, pode-se analisar que o aluno não precisaria necessariamente de resolver ambas as perguntas por meio de contas, seja por divisão, fatoração, ou outros métodos matemáticos, mas poderia optar, por exemplo, por separar objetos quaisquer e fazer uma correspondência biunívoca com cada aluno até conseguir chegar ao resultado, ou seja, ele pode ser desafiado a resolver tal questão à proporção de seus conhecimentos previamente adquiridos, como sugere o segundo passo de Allevato (2013).

Segundo relato de Reis (2014, p. 66), "Durante o processo de resolução, os alunos discutiram ideias sobre os caminhos a seguir, a lógica de algumas situações trabalhadas tanto da teoria quanto dos problemas propostos e souberam organizar com qualidade as respostas desenvolvidas", portanto percebe-se que traçaram justamente o que se esperava na resolução dos problemas, segundo Polya.

Em harmonia, segue-se abaixo uma das possíveis resoluções propostas Reis (2014, p. 25) de onde as questões foram retiradas:



Solução a): Sabemos que $198 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11$ e $189 = 3^3 \cdot 7$, logo, o número de alunos em cada grupo será o maior divisor comum aos dois números, nesse caso, 3^2 . Portanto, o número máximo de alunos em cada grupo será 9.

Solução b): Serão formados $198 : 9 = 22$ grupos de sextos anos e $189 : 9 = 21$ grupos de sétimos anos.

É certo que, o trabalho de Reis (2014) traz importante oportunidade para professores, alunos, leitores e curiosos de conhecer teoria, problemas e métodos de resolução, com linguagem simples, além de ser uma abordagem ampla de aplicações na teoria de resolução dos problemas incluídos nos livros didáticos, apostilas de concursos ou mesmo em grupos de estudos para a preparação de alunos para as olimpíadas.

Contudo, por mais que esta disciplina seja mais teórica, conceitual, e ainda ser desenvolvida em grande parte, de forma tradicional, sem qualquer construção originada por parte dos alunos, apenas aceitar as validades propostas pelos professores, Reis (2014) e Junior (2013), os autores demonstram na prática, o uso da resolução de problemas a partir dos mesmos materiais de estudos, porém, com apropriação e desencadeamento dos discentes usando as fases de Polya e/ou Allevato.

Conclusão

Não há dúvidas de que, os estudos oriundos e ocasionados por meio das experiências tanto de professores, quanto de alunos, historiadores e sociólogos da educação, proporcionaram os métodos de educação que se tem hoje, com destaque no meio matemático.



Apesar de ainda permanecerem tradicionalismos nesse ensino, já se desencadeou partes consideráveis das vicissitudes que se tinham, e cada vez mais ganha-se espaço o ensino que cultiva a autonomia, o saber, o raciocínio, a investigação e o gozo pelo aprender.

Sabe-se ainda que, doravante a esses métodos inovadores de ensino, nenhum terá cem por cento (100%) de eficácia ou será uma ferramenta milagrosa, porém, elas facilitam a mediação até o conhecimento, desencadeiam dinamicidade e recursos para a prática docente. De acordo com Gazzoni & Ost (2008, p. 44) a resolução de problemas deve ser feita:

Utilizando-se o método proposto por Polya, constata-se que, com mais facilidade, organizam-se as ideias e se obtém a solução do problema com uma melhor compreensão do que se não tivéssemos seguido seu método. Também é possível encontrar problemas análogos e tornar mais clara uma estratégia para sua resolução. Certamente esse método não é uma ferramenta milagrosa, mas torna-se necessário e eficiente seu uso em um grande número de problemas, principalmente os que apresentam um maior nível de dificuldade.

Com base na concepção de Onuchic e Allevato (2011), no processo de ensino, aprendizagem e avaliação de matemática, a partir da resolução de problemas, o aluno desenvolve além de habilidades de investigação, a busca em seu repertório cultural, sendo que os discentes passam fazer diversas conexões com os conteúdos de matemática, gerando novas propostas e novos conceitos.

Vale lembrar que, ao aluno seguir os passos de Allevato na resolução de problemas, desperta o senso crítico, a desenvoltura de investigação, sendo respeitoso a opinião dos outros alunos, até chegar a um consenso e finalmente ao resultado, verificando cada etapa e a evolução do pensamento sobre o problema proposto.



Por outro lado, a compreensão desse processo remete a ampliação do aprendizado para diferentes contextos, quebrando as dificuldades apontadas pela Patrini (2018) no seu trabalho, ou mesmo no meio escolar, quando aluno diz não saber onde usar o conteúdo.

Além disso, a resolução de problemas é capaz de dar ao aluno o gosto pela pesquisa, pela matemática, ser provedor do seu conhecimento, sob mediação e auxílio do professor na formulação de conceitos, dando, portanto, a oportunidade de manifestar suas inquietações e não apenas absorver os conteúdos ensinados pelo docente.



Referências bibliográficas

ALLEVATO, Norma Suelly Gomes. **Trabalhar através da resolução de problemas: possibilidades em dois diferentes contextos**. Revista Vidya. Santa Maria, 2013. Pág. 209 a 232. Disponível em: <https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/26/214>. Acesso em: 22 jun. 2021.

BARBOSA, J. C. **Teoria dos números no ensino básico: um estudo de caso no 2º ano do Ensino Médio**. Recife, 2017. Universidade Federal Rural do Pernambuco. Acesso em: 22 jun. 2021.

BERTONE, Ana Maria Amarillo. **Introdução à Teoria dos Números**. Uberlândia, MG. UFU, 2014, 202p. Acesso em: 24 jun. 2021.

JUNIOR, L. J. **Teoria dos números: um estudo com resolução de problemas na educação básica**. Londrina, 2013. Dissertação de mestrado da Universidade Estadual de Londrina. Acesso em: 22 jun. 2021.

LEÃO, Maria Maciel. **Paradigmas Contemporâneos de Educação: Escola Tradicional e Escola Construtivista**. 2014. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/cp/a/PwJJHWcxknGGMghXdGRXZbB/?lang=pt>. Acesso em: 23 jun. 2021.

"Linha Tradicional" em *Só Pedagogia*. Virtuosa Tecnologia da Informação, 2008-2021. Disponível na Internet em: <http://www.pedagogia.com.br/conteudos/tradicional.php>. Consultado em: 23 jun. 2021 às 17:19.

ONUCHIC, L. R. **A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos e para onde iremos?**. IV Jornada Nacional de Educação Matemática. 17º Jornada Regional de Educação Matemática. Universidade de Passo Fundo. 2012. Disponível em: <http://seer.upf.br/index.php/rep/article/view/3509>. Acesso em: 22 jun. 2021.

PATRUNI, S. I. L. G. **O ensino da matemática através da resolução de problemas**. Disponível em: <https://revistaselectronicas.ujaen.es/index.php/riai/article/view/4180/3405>. Acesso em: 22 jun. 2021.



PONTES, E. A. S. Método de Polya para resolução de problemas matemáticos: uma proposta metodológica para o ensino e aprendizagem de matemática na educação básica. Revista Holos, 2019. Instituto Federal de Alagoas. Disponível em: <http://www2.ifrn.edu.br/ojs/index.php/HOLOS/article/view/6703/pdf>. Acesso em: 22 jun. 2021.

REIS, C. C. Oficina de aritmética: o uso dos números primos na resolução de problemas e algumas curiosidades. Universidade Federal do Espírito Santo- Centro de Ciências Exatas- Departamento de Matemática. Vitória- ES, 2014. Disponível em: <http://repositorio.ufes.br/handle/10/4822>. Acesso em: 22 jun. 2021

Recebido em: 09/10/2021.

Aprovado em: 04/05/2022.



A PROPOSTA FORMATIVA DO CLUBE DE MATEMÁTICA VISTA A PARTIR DO PLANEJAMENTO DE UMA SDA PARA O CONCEITO DE EQUAÇÃO

THE FORMATIVE PROPOSAL OF THE MATHEMATICS CLUB SEEN FROM THE PLANNING OF TTS⁹ FOR THE CONCEPT OF EQUATION

Janine Barbosa Lima Fransolin¹⁰

Lukas Adriel Francisco Alves¹¹

Maria Marta da Silva¹²

Paloma Aparecida do Nascimento¹³

Wallace Yamamoto Garcia¹⁴

RESUMO

O artigo resulta de uma investigação com professores de Matemática em formação inicial participantes do Clube de Matemática da Universidade Estadual de Goiás, Campus Sudoeste – Sede Quirinópolis, durante o planejamento de uma situação desencadeadora da aprendizagem (SDA) no formato de história virtual do conceito alicerçada no movimento

⁹ Teaching Trigger Situation = Situação Desencadeadora de Aprendizagem.

¹⁰ Mestra em Educação em Ciências e Matemática pela Universidade Federal de Goiás. Docente da Secretaria de Estado da Educação de Goiás. E-mail: janine7947@hotmail.com.

¹¹ Licenciando em Matemática pela Universidade Estadual de Goiás Câmpus Sudoeste – Sede: Quirinópolis. Membro do Clube de Matemática. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8770-9156>. E-mail: lukasadriel1@gmail.com.

¹² Pós-doutoranda pela Universidade de São Paulo. Doutora em Educação em Ciências e Matemática pela Universidade Federal de Goiás. Professora da Universidade Estadual de Goiás Câmpus Sudoeste – Sede: Quirinópolis. Coordenadora do Clube de Matemática. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3717-1439>. E-mail: profmariamarta@hotmail.com.

¹³ Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual de Goiás Câmpus Sudoeste – Sede: Quirinópolis. Mestranda no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal de Goiás. Membro do Clube de Matemática. E-mail: profpaloma24@gmail.com.

¹⁴ Licenciado em Matemática pela Universidade de Uberaba. Membro do Clube de Matemática. E-mail: w.yamamoto@hotmail.com.



lógico-histórico do conceito de equação. Destaca-se como objetivo principal: compreender como o planejamento dessa SDA contribuiu para a formação dos futuros professores de Matemática envolvidos no projeto. Assim, a questão problematizadora é quais os sinais das contribuições do planejamento de uma SDA acerca do conceito de equações no contexto formativo do CluMat para a formação dos futuros professores de Matemática? Na busca de respostas realizamos um experimento formativo com os clubistas. Concernente a tais escolhas a estrutura de análise é composta de unidade, cenas e flashes. Os resultados dão indícios de que a interface entre a proposta formativa ofertada no clube de matemática e a organização do ensino do conceito de equação a partir de uma SDA firmada no movimento lógico-histórico possibilitou a interconexão do conhecimento matemático com a produção de conhecimento humano, conferindo-lhe o caráter formativo do sujeito.

Palavras-Chaves: Formação de Professores; História Virtual; Clube de Matemática; Equação.

ABSTRACT

The article is the result of an investigation with Mathematics teachers in initial formation who participate in the Mathematics Club of the State University of Goiás, Campus Sudoeste – Quirinópolis, during the planning of a situation that triggers learning in the format of virtual history of the concept based on logical movement- background of the equation concept. The main objective is: to understand how the planning of this TTS contributed to the formation of future Mathematics teachers involved in the project. Thus, the problematizing question is: what are the signs of the contributions of the planning of an TTS regarding the concept of equations in the formative context of CluMat for the formation of future Mathematics teachers? In search of answers, we carried out a formative experiment with club members. Concerning such choices, the analysis structure is composed of units, scenes and flashes. The results show that the interface between the formative proposal offered at the math club and the organization of teaching the concept of equation from an TTS based on the logical-historical movement enabled the interconnection of mathematical knowledge with the production of human knowledge, giving it the formative character of the subject.

Keywords: Teacher Education; Virtual History; Math Club; Equation.

Introdução



A formação de professores vem sendo pauta, com recorrência, de diversos estudos destacando que a “atividade principal do professor é o ensino, portanto é preciso organizá-lo de forma a não contemplá-lo como um ensino qualquer, mas sim que conduza o sujeito ao seu desenvolvimento [...]” (FERREIRA, 2019, p. 51) e, nessa concepção, os professores se formarão mediante o movimento de organização das suas atividades de ensino (SILVA; CEDRO, 2020). Nesse caminho e diante da necessidade de outra proposta para o processo de formação de professores de Matemática e este possua interface com a organização do ensino de conceitos matemáticos é que existem espaços como o do Clube¹⁵ de Matemática da Universidade Estadual de Goiás - Campus Sudoeste - Sede Quirinópolis (CluMat - UEG). Tal ambiente busca propiciar, por intermédio do planejamento compartilhado de suas ações, condições de aprendizagem da docência em Matemática e do ensino dos conceitos Matemáticos, por meio de um olhar que privilegia a essência dos conceitos ensinados na Educação Básica (EB). O CluMat - UEG, assim como os demais clubes, encontram-se alicerçados em pressupostos da Teoria Histórico-Cultural (THC), Teoria da Atividade (TA) e na proposta teórico-metodológico da Atividade Orientadora de Ensino (AOE), respectivamente propostas por Vygotsky (2003), Leontiev (1978) e Moura *et al.* (2010).

Portanto, ao planejar uma atividade de ensino no CluMat os sujeitos, neste caso os professores em formação, são colocados frente à necessidade de organizar a

¹⁵ O Clube de Matemática se constituiu no ano de 1999 na Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (FE-USP) como projeto de estágio, este acolhe acadêmicos da graduação em Licenciatura em Matemática, Pedagogia e do Programa de Pós-Graduação em Educação, respectivamente orientados pelos professores do Colégio de Aplicação e da FE-USP. Posteriormente o projeto se instaurou, simultaneamente, no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás (IME/UFG) e no Centro de Educação da Universidade Federal de Santa Maria (CE/UFSM) em 2009.



atividade de forma a contemplar os pressupostos que alicerçam o espaço formativo e mediante essas condições os “[...] sujeitos transformam-se, modificam-se em virtude da necessidade de definir as ações da\ na atividade pedagógica que se constitui” (SILVA; CEDRO, 2020, p. 355), pois “o desafio que surge aqui é o de como fornecer ao indivíduo a formação necessária e suficiente para que ele possa promover o salto qualitativo das suas concepções individuais de mundo para aquelas que reflitam os conhecimentos universais mais avançados obtidos pela humanidade” (CEDRO, 2008, p. 15).

Para tanto, durante o planejamento de uma Situação Desencadeadora de Aprendizagem¹⁶ (SDA) acerca do conceito de equação foram selecionadas ações coletivas a fim de conduzir os sujeitos a pensar e repensar os processos de aprendizagem da docência e ensino dos conceitos matemáticos, concomitante a isso, a sua formação humana e individual (SILVA, 2017). Nesse caminho buscamos respostas ao seguinte questionamento: quais os sinais das contribuições do planejamento de uma SDA acerca do conceito de equações no contexto formativo do CluMat-UEG para a formação dos futuros professores de Matemática? De maneira interdependente a essa problemática tem-se o objetivo central desse artigo: compreender como o planejamento de uma SDA acerca do conceito de equação, no contexto formativo do CluMat contribuiu para a formação dos futuros professores de Matemática que desse espaço fazem parte.

Em busca de compreender como esse processo se deu optou-se por uma metodologia com características de experimento formativo. Conexa à opção

¹⁶ As SDAs podem ser materializadas no formato de jogos, situações emergentes do cotidiano e histórias virtuais do conceito (MOURA *et al.*, 2010). Nas concepções de Moura e Lanner de Moura (1998) deve-se oportunizar, em ambos os formatos, ações que coloquem o sujeito frente a uma situação-problema que se assemelhe à vivenciada historicamente pelo homem.



metodológica tem-se uma estrutura de análise de dados organizada em unidade de análise, cenas e flashes.

No intuito de que se tenham condições de compreender todo o processo que deu origem a esse artigo primeiramente buscou-se compreender a formação de professores de matemática posta e a proposta pelo clube de matemática; por fim temos o caminho metodológico seguido da análise de dados e ao final algumas considerações.

A atual proposta de formação de professores e a ofertada pelo CLUMAT

As discussões acerca dos processos formativos dos professores de matemática tem se intensificado nas últimas três décadas, entre outros motivos pelo fato de “configurar-se num campo autônomo de estudos haja vista a existência de um objeto de estudo próprio [...]” (CECCO; BERNARDI; DELIZOICOV, 2017, p. 1103). Diante desse entendimento surgem os questionamentos: como o professor de matemática é formado? Onde acontece essa formação? Quais as implicações da sua formação na forma como estrutura sua atividade pedagógica?

Tais questões se relacionam com a estrutura curricular e a forma como os elementos constituintes da atividade pedagógica – planejamento, conteúdo e avaliação – são concebidos nos processos formativos desses professores, o que reflete conseqüentemente em um ensino da matemática engessado que avalia os resultados e não os processos. Partindo do pressuposto que o professor é o sujeito responsável pela organização das ações que permitem a objetivação da atividade de ensino, fica evidenciada a necessidade de se repensar a formação de professores de matemática e seus respectivos espaços formativos.



Na contramão do que já existe acerca de processos formativos de professores de matemática temos o CluMat - UEG, espaço que permite aos licenciandos a aprendizagem da docência em Matemática, conexas à compreensão do processo de ensino dos conceitos matemáticos contemplados no Ensino Fundamental I e II. O CluMat - UEG traz uma proposta diferente do habitual de organização do ensino dos conteúdos matemáticos ensinados na educação básica. Suas ações caminham em paralelo com as aulas da graduação na Universidade Estadual de Goiás – Campus Sudoeste – Sede Quirinópolis, possibilita aos licenciandos tanto a elaboração quanto o desenvolvimento de atividades dentro de uma perspectiva teórico-metodológica muito bem alicerçada teoricamente, além de termos escolas públicas como parceiras do projeto. Logo, resulta em um processo que implica a aprendizagem da docência na interdependência da organização do ensino dos conceitos matemáticos travestidos de conteúdos escolares. O Clube de Matemática tem como base de sua proposta a coletividade e o compartilhamento de ideias, colocando todos os participantes em movimento na para a constituição da unidade pedagógica: ensino-aprendizagem.

Os encontros coletivos voltados para o planejamento das atividades de ensino aconteciam aos sábados nas dependências do campus universitário, entretanto em 2020\2021 devido à pandemia os mesmos ocorrem por meio de videoconferências. Contudo, mesmo com as condições objetivas adversas tais ações não deixaram de ser subsidiadas pela perspectiva da Teoria Histórico Cultural de Vygotsky e da Teoria da Atividade de Leontiev em virtude do aporte teórico para os conjuntos de atividades de ensino desenvolvido pelo Clube terem entre outras características basilares o fato de contemplarem o movimento lógico-histórico dos conceitos. Para que isso aconteça são definidas as particularidades dos mesmos, os conteúdos que abordarão,



os materiais e instrumentos a serem utilizados, dentre outros aspectos. Tal proposta de ensino é alicerçada nos pressupostos teórico-metodológicos da Atividade Orientadora de Ensino de Moura (2010), o qual defende que toda atividade de ensino “se estrutura de modo a permitir que os sujeitos interajam, mediados por um conteúdo, negociando significados, com o objetivo de solucionar coletivamente uma situação-problema” (MOURA, 2011, p. 155). Esses conteúdos são a forma escolar de materialização dos conceitos matemáticos entendidos no CluMat como parte do resultado de necessidades humanas. Tais conteúdos são apresentados aos alunos das escolas parceiras do projeto na esteira do desenvolvimento das situações desencadeadoras de aprendizagem (SDAs). A seguir temos a apresentação da SDA no formato de história virtual (HV) que subsidiou esse artigo.

Mendhi um Vizir em Luxiar: Uma história para o ensino de equações

Diante das necessidades e anseios postos na busca de uma formação de professores de matemática que contemple um desenvolvimento do sujeito em suas capacidades máximas, busca-se refúgio em pressupostos teórico-metodológicos que possam sustentá-la. Para tanto, encontra-se na AOE uma estrutura metodológica que reflete as compreensões do movimento lógico-histórico dos conceitos matemáticos, ou seja, onde os elementos (síntese histórica – SH -, SDA e Síntese Coletiva) que constituem a AOE sejam considerados caminho para o entendimento de que os conceitos matemáticos são produtos das necessidades humanas (FERREIRA, 2019). Todavia, a AOE não é compreendida apenas como uma proposta teórico-metodológica para o ensino dos conceitos matemáticos, mas para, além disso,



princípio do fenômeno educativo e meio para a investigação de diversos aspectos particulares da atividade pedagógica (MOURA *et al.*, 2017).

Deste modo, as SDAs planejadas no CluMat compreendem a constituição dos conceitos matemáticos como produto das relações sociais e histórico-culturais, como objeto de solução para os problemas enfrentados pela humanidade. Tais SDAs possuem entre seus objetivos contemplar a essência do conceito, ou seja, o momento de surgimento e processo de desenvolvimento de um dado conceito. A esse respeito, Kopnin (1978, p. 184) afirma que “para revelar a essência do objeto é necessário reproduzir o processo histórico real de seu desenvolvimento, mas este é possível somente se conhecemos a essência do objeto”, e, ancorados nesse pensamento foi desenvolvida a síntese histórica do conceito (SH) que permite identificar elementos essenciais para a constituição da SDA.

Frente a estrutura da AOE identifica-se a SDA como um de seus elementos essenciais por possuir em si o potencial de propiciar o surgimento do motivo de aprendizagem, bem como meio de desencadear a tensão criativa dos processos de aprendizagem de forma a levar os sujeitos a se (re)organizarem para atribuição de sentidos e significados a um conceito que consideram relevante para si (MOURA *et al.*, 2017). O processo de constituição da SDA materializada como história virtual¹⁷ (HV), apresentada a seguir, é fruto de compreensões de um coletivo que investigou o processo de desenvolvimento do conceito de equações, iniciado a partir da organização de uma SH, visto que ela norteou todas as ações e decisões tomadas na construção da HV. Portanto, recebeu o nome de “Mendhi – Um Vizir em Luxiar”, pois

¹⁷ Compreende-se que as histórias virtuais do conceito nos pressupostos da AOE devem levar os sujeitos a perpassarem por parte da necessidade real que levou o homem a criar o objeto matemático posto em discussão, ou seja, não é necessariamente a própria história do conceito, porém carrega em si a sua essência (MOURA *et al.*, 2019).



está intrinsecamente ligada ao contexto social, cultural e histórico-econômico da sociedade do Antigo Egito, sendo a mesma detentora de elementos histórico-culturais que possivelmente permitiram o surgimento e desenvolvimento desse conceito matemático.

Diante de outros nexos internos¹⁸ que compõem o conceito de equações optou-se por trabalhar com os de equivalência e variável, vez que mediante o cenário e as relações comerciais do Antigo Egito encontramos a oportunidade de criar um espaço histórico-social composto por uma teia de relações socioeconômicas que sustentavam os nexos escolhidos, visto que a organização comercial da época concebia a oportunidade de manifestá-los. A HV também oportunizou aos sujeitos perpassarem pelas três etapas da álgebra (retórica, sincopada e simbólica) em momentos específicos e com problemas desencadeadores apropriados para conduzir intencionalmente os sujeitos a essas fases.

Todavia, por que planejar uma HV voltada para o ensino desse conceito matemático na EB? Ora, a resposta para esta indagação está relacionada à importância que a álgebra tem na historicidade do homem, bem como a forma que vem sendo ensinada. Tendo como pressuposto um ensino alicerçado em perspectivas que pouco se preocupam com a formação de um sujeito crítico, portanto

¹⁸ Para Sousa, Moura (2016) tais nexos não estão inclusos somente na linguagem formal do conceito por não estarem despidos do trabalho humano que os suscitou, das contradições. Os nexos internos estão impregnados de história, por isso, são históricos. Ao contrário dos nexos externos que são especificados em salas de aula de matemática, somente a partir dos aspectos simbólicos contidos nos conceitos, como se os símbolos possuíssem vida própria; falassem por si só, pois são apresentados em seu último estágio de rigor, a partir de alguns experimentos ou ainda de memorizações, os nexos internos dos conceitos se preocupam em serem vistos a partir da análise das mudanças históricas, ou seja, deixam-se mostrar a partir das sínteses históricas do conceito. Nas SDAs nos preocupamos em considerar em como os conceitos são gerados, como se dá sua gênese, que na maior parte do tempo ocorre na práxis humana, afinal a atividade humana faz parte de “um particular contexto histórico, cultural e institucional” (RENSHAW, 1999, p. 10).



proporciona o ensino baseado apenas na lógica formal que está posta e fossilizada.

Na sequência temos a HV planejada.

“Mendhi – Um Vizir em Luxiar”:

Há muitos anos no Egito, havia uma cidade chamada Luxiar, famosa pelo seu comércio. Nesta cidade viveu um antigo escriba chamado Ardrux, o qual orientava os comerciantes para que a prosperidade oriunda do comércio durasse para as próximas gerações. Por isso, Ardrux deixou papiros contendo informações preciosas e os distribuiu dentre os maiores comerciantes da época.

Com o passar do tempo, os papiros se perderam e o mercado de Luxiar tornou-se um importante centro comercial e econômico do Egito, tomando proporções que Ardrux jamais havia imaginado.

Toda a movimentação do comércio tinha relação com as cheias do Rio Nilo, pois elas traziam ciclos de prosperidade para a região. Como de costume, cada família cuidava de seu próprio produto: Jacar com seu famoso pescado, Abduh criava gado, Radamés tinha imensa criação de galinhas, Duncan e sua plantação de trigo, Yunett plantando cevada, Aizen ofertava o melhor algodão e Liz encantava com lindas peças de argila.

Com constante crescimento do comércio e sem Ardrux e seus papiros, as orientações deixadas foram aos poucos esquecidas pela maioria dos comerciantes locais e o método utilizado para determinar o valor dos objetos tinha se perdido, conseqüentemente o recolhimento de impostos também ficou falho, então o faraó percebeu que no mercado de Luxiar sua arrecadação de impostos não condizia com a prosperidade local. Logo, sem querer criar desconfiança na população, o Faraó reuniu seus escribas para encontrarem uma solução para o problema.

Entretanto, como não se chegava a uma solução, o Faraó resolveu enviar Mendhi, o seu melhor vizir, para coletar informações sobre o comércio de Luxiar. O esperto vizir então pensou em um plano para infiltrar no mercado e resolveu se passar por um comerciante, pois assim teria acesso aos produtores e outros mercadores.

Já no primeiro dia de trabalho surgiu um comprador chamado Duncan que se interessou por uma das enxadas que Mendhi tinha para venda.

- Essa é a melhor enxada que vai encontrar em todo Egito, disse Mendhi.

- Duncan respondeu: Além do trigo que eu produzo, eu também comprei em grande quantidade pescado, gado, galinhas, cevada, algodão e peças de argila. Vou te fazer uma proposta inicial: o que acha de 10 sacas de trigo em troca da enxada?

- Mendhi recusou, pois devido à cheia do rio Nilo algumas produções foram prejudicadas e outras não, sendo atingidos os criadores de animais e os artesãos. Já os beneficiados foram os produtores de trigo, cevada, algodão e pescados. Sendo assim, Mendhi acreditava que merecia uma proposta de pagamento diferente do que a feita por Duncan.

Então, pessoal o Mehndi era um vizir e tinha suas obrigações de acordo com o cargo que recebeu do Faraó e, além disso, era o seu preferido, por isso não podemos tomar o cargo dele e dar a vocês, mas vamos torná-los escribas a partir de agora. Vocês sabem quem são os escribas?

Os escribas eram as pessoas responsáveis pelo registro dos principais fatos da sociedade egípcia por meio da escrita. Agora, vamos imaginar que vocês são escribas e, como tais, irão escrever de forma organizada em uma tabela todas essas informações referentes às possíveis trocas entre Duncan e Mendhi para que ambos não tomem prejuízos.

Apesar de Mendhi ser um bom negociador, seu objetivo não era apenas manter se ativo no mercado, mas observá-lo para levar as informações ao Faraó, já que ele havia sido enviado pelo mesmo. Então, Mendhi voltou ao Faraó para contar sobre suas observações no mercado e como ocorriam as negociações.

Durante seu relato, Mendhi percebeu que perdera parte de suas anotações na viagem de Luxiar até o palácio e preocupado com a ira do Faraó entrou em desespero. Para se safar da situação, Mendhi lembrou-se de que o Faraó era muito supersticioso com doenças,

então começou a tossir e fez de conta que passava mal, assim o Faraó imediatamente pediu que ele se retirasse.

Mendhi após sair da presença do Faraó, começou a checar novamente suas anotações e encontrou o seguinte relato: "Eu estava lá, quieto, há uns dias não vendia, então apareceu um senhor que queria um pote de argila, mas o que ele tinha para me oferecer era insuficiente para valer a argila. Ele me deu um saco de trigo e buscou alguma outra coisa que não me recordo e completamos a troca." Mendhi precisa descobrir o que o senhor deu a ele, além do saco de trigo, em troca do pote de argila.

Mendhi conseguiu resolver o problema e para sua sorte os guardas do faraó já tinham vindo conferir como estava sua saúde para só depois ser levado à presença do faraó, já impaciente para obter respostas.

Mendhi retornou à sala do Faraó e disse: Meu senhor, trago novidades. Então ele conta suas descobertas (que na verdade serão as respostas dos alunos).

Mendhi compreendeu o quanto os acontecimentos da vida do homem poderiam interferir na quantidade da oferta e, conseqüentemente, nos preços dos produtos trazidos pelos comerciantes, ocasionando constantes alterações nas relações comerciais de Luxiar. Assim, propôs ao faraó que fosse utilizado o seu manual para que as ações advindas do comércio fluíssem melhormente, como também tivessem um parâmetro que ajudasse os comerciantes a realizar suas compras e vendas. O faraó ponderou sobre a proposta de Mendhi e decidiu, então, fazer uso das ideias de seu estimado vizir e implementar o Manual dos Comerciantes de Luxiar, o qual serviria de orientação para as relações comerciais do reino.

Ao organizarmos a HV 'Mendhi – Um Vizir em Luxiar' toma-se "[...] por base um pressuposto da didática de que é sempre possível a organização de processos de ensino que visem ao aprimoramento de outros" (CEDRO; MOURA, 2010, p. 13), desse modo compreende-se a construção coletiva dessa HV apoiada em concepções que



buscam permitir uma formação crítica que valorize a prática como dimensão de “[...] uma dinâmica mais geral dos processos formativos que unem a aquisição de informação com a tomada de decisão sobre: o objetivo de usá-la; o como deve ser usada; e para quem se volta esta utilização” (CEDRO; MOURA, 2010, p. 13).

Portanto, durante o planejamento da mesma os sujeitos em formação vivenciaram os processos que constituem os elementos da atividade pedagógica do professor de matemática e simultaneamente compreenderam, desenvolveram e transformaram-se em busca de suprir as necessidades postas pela organização do ensino pautada na base teórica defendida pelo CluMat. Atrelada a esse planejamento havia a busca pela superação da realidade posta pela sociedade no que tange aos processos de aprendizagem da docência em matemática e organização de atividades de ensino como meio de permitir que os sujeitos em formação compreendessem a historicidade humana e sua relação interdependente com o surgimento dos conceitos matemáticos. Essa interdependência não implica que os sujeitos devem seguir todo o percurso histórico necessário para a gênese dos conceitos, mas sim de “uma questão de compreender melhor a natureza do conhecimento matemático e de encontrar, dentro de sua estrutura histórica, novas possibilidades de ensino” (RADFORD, 2011, p. 44). Por isso, a HV planejada materializa parte da fluência oriunda da construção do conhecimento humano-matemático ao abarcar o movimento que “compõem a natureza do pensar científico, portanto, compõem a natureza do pensar matemático” (SOUSA, 2004, p. 61), sendo que tal modo de pensamento necessita de um caminho metodológico intencionalmente organizado para que ocorra, ou seja, uma trajetória metodológica.



Metodologia

O momento da escolha da metodologia na qual a pesquisa estará pautada é deveras relevante, uma vez que “[...] o mais importante na metodologia a ser usada, apesar da dificuldade em escolhê-la, é que ela possa satisfazer as necessidades do pesquisador, ou seja, encontrar explicações para o problema proposto; e isso exige um indivíduo realmente motivado e interessado em resolver uma situação-problema” (MOURA, 2002, p. 43). É nesse momento em que, motivados¹⁹ pelas necessidades impostas ao contexto investigativo, busca-se um conjunto de ações capazes de sanar as inquietações que originaram a investigação e, nesse instante também se procuram ferramentas que contribuam para a proposição de soluções para possíveis percalços que poderão surgir ao longo do caminho. Em detrimento a isso, inicia-se a busca de uma metodologia capaz de abordar os aspectos desejados no objeto de pesquisa que seja suficiente para guiar as ações do coletivo rumo à apreensão e compreensão dos fenômenos inerentes à pesquisa realizada.

Para que todas as objetivações pudessem ser sobrelevadas durante a investigação optou-se pela realização com os sujeitos de pesquisa, os clubistas – aproximadamente 30, um experimento formativo porque o mesmo traz “[...] uma estrutura investigativa realizada em várias etapas, nas quais o processo de execução, assim como de obtenção dos dados, de apresentação dos objetos aos sujeitos, de registro, de análise do movimento do pensamento do sujeito ocorrem simultaneamente” (SILVA, 2018, p. 47). A escolha dessa metodologia está pautada nas

¹⁹ O conceito de motivação é entendido por nós como “uma série de fenômenos distintos: os impulsos instintivos, os apetites e inclinações biológicas, as vivências emotivas, os interesses e os desejos” (LEONTIEV, 1983, p. 155)



potencialidades que o experimento formativo pode oferecer a uma pesquisa de cunho qualitativo sobre os processos de ensino e aprendizagem da docência por se configurar em uma “intervenção pedagógica por meio de uma determinada metodologia de ensino, visando interferir nas ações mentais dos educandos e provocar mudanças em relação a níveis futuros esperados de desenvolvimento mental” (LIBÂNEO, 2007, p. 11). Essa metodologia é vista como uma tentativa de ofertar aos sujeitos da pesquisa as condições objetivas para que, mediante o planejamento compartilhado, possam aprender a produzir a organização do ensino da Matemática escolar. É fato que se configura na possibilidade de contribuição a fim de oferecer aos futuros professores condições objetivas para transformarem-se em produtores da organização do ensino de Matemática (SILVA, 2018).

Em meio as etapas que sucederam essa investigação é importante salientar que a coleta de dados para posterior análise ocorreu por meio do uso de recursos audiovisuais com a gravação dos encontros semanais do CluMat durante o ano de 2020 e meados de 2021, vez que somente a primeira reunião do ano letivo aconteceu de forma presencial, em virtude da impossibilidade de contato entre os clubistas devido ao contexto pandêmico no qual estamos imersos até a atualidade, dessa forma todas as posteriores reuniões aconteceram de forma remota, foram gravadas e transcritas.

Para uma melhor compreensão da estrutura organizativa do experimento formativo em questão a seguir será apresentada uma tabela que organiza as etapas de desenvolvimento do mesmo.



Quadro 1 - Estrutura organizativa do experimento formativo

Estrutura Organizativa do Experimento Formativo		
Planejamento da Síntese Histórica	Planejamento da História Virtual do Conceito	Planejamento da Síntese coletiva
Antes da elaboração da SH do conceito de equação ocorreram vários encontros para estudo da base teórico-metodológica que subsidia as ações do clube de matemática. Após esses encontros teve início a etapa dos estudos historiográficos para o desenvolvimento da SH. A síntese histórica é a primeira etapa das atividades, sendo destaque porque nela é possível apreender o movimento histórico-lógico do conceito. Durante a elaboração dessa síntese os sujeitos têm contato com os nexos internos presentes na constituição dos objetos matemáticos.	Após o desenvolvimento da síntese histórica e com os nexos a serem abordados já identificados, os clubistas escolhem como querem materializar a SDA, se no formato de jogo, se como situação cotidiana ou como história virtual do conceito. A opção feita nesse caso em específico foi pela HV. Logo, os professores em formação foram colocados diante da necessidade de criarem coletivamente um conjunto de ações e operações que intencionalmente abordassem o movimento histórico-lógico de surgimento e desenvolvimento do conceito de equação destacados na SH. Essas ações e operações se configuraram nos problemas desencadeadores criados para que os nexos internos – equivalência e variável – pudessem conduzir os sujeitos ao entendimento do conceito em sua totalidade.	Após o planejamento da SDA foi o momento de elaboração da síntese coletiva. Como a aprendizagem, segundo os pressupostos da THC só é possível por meio da interação social e da apropriação da cultura produzida pelos precedentes, esse momento da síntese coletiva é dotado de aspectos dialéticos por considerar as potencialidades existentes nas contradições entre as diversas contribuições dos pares. Aqui, os sujeitos compreenderam o movimento histórico-lógico do conceito abordado ao conduzirem a atividade a um entendimento histórico do mesmo, porém que alcance o momento atual de desenvolvimento.

Fonte: Produção dos autores.

Durante todas as etapas do experimento formativo foram coletados os dados com uso de recursos audiovisuais, como já citado anteriormente. Essas informações foram organizadas de modo a permitir a análise dos mesmos.



Análise de dados

Neste tópico procura-se mostrar, no movimento da análise de dados, o processo de desenvolvimento das contribuições do planejamento de uma SDA acerca do conceito de equações no contexto formativo do CluMat-UEG para a formação dos futuros professores de Matemática.

Para realizar uma análise nos moldes teóricos aqui expostos fez-se “indispensável descobrir, sob o aspecto externo do processo, o conteúdo interno, a natureza e a origem que fossem ao encontro da base teórica escolhida” (SILVA, 2018, p. 144). Isso se faz necessário porque a “problemática concernente à análise está no fato de que, para se captar a essência, é preciso analisar os processos” (SILVA, 2018, p. 144). Sendo assim foi imperioso encontrar a adequada afinidade que reside no processo analítico para que fosse possível desvelar essas relações a partir do processo metódico de análise. Ancorados em Silva (2018) é proposta uma análise que “distingue-se fundamentalmente da análise subjetiva, introspectiva que, por seu próprio caráter, não é capaz de sobrepujar os limites descritivos. Por esse ponto de vista, tão-somente é admissível a análise de caráter objetivo já que não se trata de manifestar o que nos assemelha ao fenômeno analisado, mas sim o que ele é de fato (VIGOTSKI, 1995). Nesse caminho, Vigotski (2001) defende o método de análise por unidades em que a precisão e a intercessão das abstrações exprimem a concepção dialética e materialista do conhecimento acerca da ciência.

Nesse caminho e em conformidade com o conceito de unidades proposto por Vigotski temos a ideia de cenas. Conforme Moura (2004, p. 267) estes seriam os momentos que “podem revelar interdependência entre os elementos de uma ação formadora”. Seriam as situações nas quais podem ser ressaltadas as regularidades do



movimento do fenômeno analisado e das cenas foram destacados os flashes. Assim sendo, o conceito de flashes estaria em consonância com a estrutura de análise de dados proposta por Vigotski e Moura. Segundo Silva (2018) os flashes são compreendidos como indícios observáveis que comprovam a existência do processo de composição da significação²⁰ do sujeito. “A procura por esses indícios não seria apenas para comprovar fatos que demonstrem a existência desse processo, mas para desvelar a dinâmica do movimento de sua constituição” (SILVA, 2018, p. 150). Os flashes encontrados nas cenas não são “somente mera definição dos sinais, mas sim uma tentativa de encontrar na sua trama não somente a existência, mas também a natureza do processo de significação dos sujeitos envolvidos” (SILVA, 2018, p. 150). Desse movimento processual nasce a seguinte composição da análise exposta no quadro abaixo.

Quadro 2 – Unidade: A formação docente no clube de matemática vista a partir do planejamento de uma SDA acerca do conceito de equação

Unidade: A formação docente no clube de matemática vista a partir do planejamento de uma SDA acerca do conceito de equação	
CENA 1: O entendimento da importância da relação lógico-histórica na organização da atividade pedagógica do professor de matemática	CENA 2: A SDA como materialização das necessidades humanas que geraram o conceito de equação

Fonte: Produção dos autores.

²⁰ “A significação é aquilo que num objeto ou fenômeno se descobre objetivamente num sistema de ligações, de interações e de relações objetivas. A significação é refletida e fixada na linguagem, o que lhe confere a sua estabilidade. Sob a forma de significações linguísticas, constitui o conteúdo da consciência social” (LEONTIEV, 1978, p. 100).



Nessa unidade de análise buscou-se o entendimento do processo de contribuição do desenvolvimento de uma SDA acerca do conceito para o processo formativo que acontece no clube de matemática. A referida SDA estava fundamentada no movimento lógico-histórico dos conceitos, portanto valorizava o contexto sócio-histórico-cultural do surgimento e desenvolvimento do mesmo. As cenas selecionadas buscam compreender como se deram essas contribuições e, nesse caminho, dão sinais de apropriação individual dos conhecimentos que estavam postos coletivamente. Portanto, a unidade e suas duas cenas componentes possuem como particularidade o fato de representarem ações coletivas que demonstram o caminho percorrido pelos sujeitos. Na sequência, foram desvelados os indícios das transformações dos sujeitos em questão na análise de cada cena e seus flashes componentes.

CENA 1 - O entendimento da importância da relação lógico-histórica na organização da atividade pedagógica do professor de matemática

Para Sousa (2018) os nexos conceituais são lógico-históricos e se apresentam no movimento do pensamento apreendido a partir da linguagem, aqui entendida como materialização do pensamento. Tal movimento deve estar presente quando se ensina e aprende os conceitos matemáticos. Nesse caso em particular o conceito é equação e faz-se necessário entender o movimento que se processa no pensamento, enquanto ele é apreendido. Nos flashes a seguir têm-se sinais de entendimento de tal discussão: *A gente não tinha noção de como foi o movimento das pessoas que nos antecederam para criar esse conceito, só agora tivemos ideia de como isso pode ter acontecido (Flash 1, Cena 1). O conceito foi evoluindo e também o jeito de*

65



representar, de falar e escrever também mudou e a gente tem que mostrar isso quando virar professor (Flash 2, Cena 1).

Kopnin (1978) endossa que o movimento do pensamento é histórico e lógico. Portanto, ao ser planejado e desenvolvido o experimento formativo considerou-se não somente o lógico posto hoje, mas atentou-se em como a confluência entre o lógico e o histórico se demuda de tempos em tempos. Os próximos flashes dão sinais de entendimento da importância de tal relação: *Verdade né, que dia que a gente quando era aluno pensou que o conceito de equação ia ter relação com a vida das pessoas, nunca na minha vida eu ia imaginar isso, achava que era invenção de matemático (Flash 3, Cena 1). Com os questionamentos que a profa vai fazendo a gente pode enxergar a história por trás do conceito (Flash 4, Cena 1).*

Deste modo, primeiramente foi preciso a compreensão da convergência existente entre o movimento lógico-histórico e as classes que constituem o lógico do histórico e da formação da linguagem formal posta para o conceito de equação se efetivem em salas de aula de matemática, entretanto, para que isso ocorra os professores no desenrolar de seus processos formativos devem já conhecer tais concepções. Portanto, entende-se que a trajetória a ser seguida para a organização do ensino de conceitos matemáticos poderá ser a que avalia a relação lógico-histórica como a detentora da fluência dos nexos conceituais, assim como abordado na história virtual. O próximo flash dá continuidade à discussão: *A atividade que a gente está fazendo não se preocupou em ensinar equação só a partir da maneira que ela está hoje, houve uma preocupação com a história do seu desenvolvimento, mas sem perder a ligação com o que é preciso saber sobre equação nos dias de hoje (Flash 5, Cena 1).*



A realização da SDA no formato de história virtual com o título 'Mendhi – um vizir em Luxiar' permitiu a defesa de que é possível o ensino de conceitos matemáticos a partir do movimento lógico-histórico, de modo que a organização da aprendizagem proporcione aos sujeitos envolvidos reflexões sobre os nexos conceituais dos conceitos matemáticos. Entretanto, ao se fazer a escolha por SDAs deve-se almejar que estas proporcionem aos sujeitos a possibilidade de compreenderem a realidade objetiva do momento histórico de criação do conceito, pois, um dos objetivos da história virtual é que ela contenha nexos internos do conceito e permita que os sujeitos percebam a relação desses nexos com a historicidade dos indivíduos criadores. Tem-se nos flashes a seguir os sinais desse entendimento: *Quando fomos fazendo a SDA a partir da SH dá para perceber um pouco como as coisas aconteceram na vida real do homem daquela época (Flahs 6, Cena 1). Percebemos algumas coisas da vida do homem antigo tinham ligação com o conceito de equação e percebemos também que para entender esse conceito temos que enxergar que esse movimento também existe em outros conceitos como o de equivalência e variável (Flash 7, Cena 1).* Tais flashes confirmam a possibilidade de generalização do conceito de equação a partir do conhecimento do conceito de equivalência e variável. A próxima cena retrata como se deu o entendimento de que o conceito de equação é resultado de necessidades humanas e isso acontece na esteira do desenvolvimento de uma situação desencadeadora da aprendizagem firmada na perspectiva de uma organização do processo formativo do professor de Matemática fundado no entendimento da essência dos conceitos matemáticos.

CENA 2 - A SDA como materialização das necessidades humanas que geraram o conceito de equação



Em se tratando da formação de professores de matemática a provocação posta é a oferta de processos formativos que ponham os sujeitos em circunstâncias provocadoras da análise e materialização dos elementos fundamentais da atividade pedagógica, entre estes o planejamento do ensino de conceitos matemáticos a partir de uma organização que manifeste a essência do conceito. Para tal optou-se pela elaboração de uma SDA e seu(s) problema(s) desencadeador(es) de forma que ambos estivessem impregnados da necessidade que “levou a humanidade à construção do conceito e favorecer uma generalização que supere a experiência sensorial (MORETTI, 2014, p. 30). Portanto, a SDA planejada pelos professores de matemática em formação inicial no clube de matemática buscava criar condições objetivo-cognitivas para a generalização do conceito de equação. Temos nos flashes a seguir os indícios dessa apreensão pelos sujeitos da pesquisa: *A gente tem que prestar bastante atenção nos detalhes da história do Mendhi, analisar mesmo esses detalhes, porque são neles que estão o caminho para as respostas dos problemas desencadeadores (Flash 1, Cena 2). Temos porque tudo está ligado não pode ter pontas soltas, informações desnecessárias, tudo tem um objetivo para estar na história e vamos ser sinceros tem gente aqui com uma criatividade (Flash 2, Cena 2). Gente eu fico aqui lendo a história e pensando que isso pode mesmo ter acontecido no Egito e em outros lugares do mundo, até mesmo ao mesmo tempo porque essas necessidades eram reais (Flash 3, Cena 2).*

Os flashes também permitem inferir que para uma organização do ensino de conceitos matemáticos a partir de situações desencadeadoras de aprendizagem que considerem a essência do conceito deve-se estabelecer a relação existente entre a produção humana do conceito que se pretende ensinar e a necessidade humana de



desenvolvê-lo ao longo da história humana (CARAÇA, 1958). Nesta concepção, os conceitos são tidos como obras vivas da interdependência direta das necessidades dos indivíduos e suas respectivas amostras temporais. Deste modo, apreender a essência de dado conceito, compreendido como produção histórica e cultural, sugere apropriar-se além de sua composição lógico-formal, também dos mecanismos de sua produção histórica (KOPNIN, 1978). *É mais aprender um conceito de matemática assim, desse jeito, entendendo porque foi criado é outro nível, por mais trabalho que dá vale muito a pena e pensem se a gente gosta pensa a molecada na escola quando tiver vendo essa história, porque a história não é só uma história qualquer, ela serve para a gente e depois serve para os alunos entenderem como a equação pode ter sido inventada, para isso nos ajudar a entender o que ela é hoje (Flash 4, Cena 2).* No flash 4 percebe-se que o professor em formação entende que compreender o processo de produção de um conceito é parte do movimento de apropriação do próprio conceito, pois conforme Moretti (2014, p. 36) “o conhecimento do objeto, faz-se possível na unidade dialética entre os aspectos histórico e lógico do objeto de conhecimento”.

Sendo assim, a história virtual ‘Mendhi – um vizir em Luxiar’ não é tão-somente a história do objeto, mas a história de sua produção e desenvolvimento, a história de como a humanidade tomou para si esse objeto, ou seja, a história de seu conhecimento. Na referida SDA importante não era apenas a lógica do objeto, isto é, o conteúdo em si, mas salutar contemplar o movimento sujeito-conhecimento-sujeito: *Eu concordo da gente por eles para escrever o ‘Manual de Luxiar’ por escrito, depois escrito de forma mais resumida e depois usando os símbolos porque eu acredito que isso deve ter acontecido de verdade na realidade, essas mudanças vem ocorrendo, mudando os padrões que, até então, eram estáveis (Flash 5, Cena 2).*



Neste viés, as duas cenas analisadas aprofundam a questão de que a organização do ensino de conceitos matemáticos que privilegia o movimento lógico-histórico do conceito pode ancorar-se teórico-metodologicamente na proposição de SDAs, as quais possuam em seu seio a essência do conceito. Tal proposta não é simplista, pois a história virtual não é simples história factual, pois estava todo o tempo impregnada do conceito que se desejava ensinar, considerando que tal conceito objetivava várias necessidades humanas postas sócio-historicamente.

Considerações finais

Pensando nas complexidades elevadas para os processos formativos de professores de Matemática - com a transmissão de modelos arcaicos de ensino e aprendizagem da matemática ofertada na EB - compreende-se que pensar tal fenômeno num contexto capaz de contribuir para a mudança dessas conjunturas não é tarefa fácil, posto que esse movimento quando (re)organizado possui potencialidades capazes de preparar profissionais com uma práxis²¹ que valoriza os aspectos lógico-históricos e ultrapassa a visão estática, simplista e de difícil compreensão sobre o movimento de constituição dos conceitos matemáticos, o que reflete na forma como os sujeitos se apropriam e contribuem para a construção do conhecimento. Em relação a necessidade de uma mudança no contexto da formação docente no que concerne a organização do ensino, Souza (2016, p. 3) salienta que:

²¹ A práxis pode ser conceituada como uma unidade dialética entre teoria e prática, ou seja, pode ser entendida como um elo existente entre os processos de trabalho teórico-práticos (VYGOTSKY, 2007).



Aqui, tanto aqueles que aprendem, quanto aqueles que ensinam são apenas usuários dos conceitos. Há de se chamar atenção para o fato de que, o uso do conceito de forma mecânica, memorizada, não implica, necessariamente, no entendimento deste como criação humana lógico-histórica, muito menos no entendimento de seus nexos internos.

Partindo do pressuposto de que o professor tem como sua principal Atividade²² o ensino e, por meio de suas ações e operações planejadas intencionalmente, intervém e colabora com os sujeitos que dessa atividade fazem parte entendemos que o processo de ensino deve permitir “a apropriação da cultura e o desenvolvimento do pensamento, dois processos articulados que compõem uma unidade” (CEDRO; MOURA, 2016, p. 122). Desta forma, tendo o professor como o principal ator no cenário educativo e em resposta às necessidades que circundam o contexto da formação desse sujeito e suas implicações no cenário educativo o CluMat busca, em meio às suas ações, a quebra da realidade da aprendizagem da docência pautada na lógica formal, o que torna esse contexto ideal para o desenvolvimento de investigações que tenham como objeto a aprendizagem da docência ancorada na elaboração de situações desencadeadoras da aprendizagem com o objetivo de admitir a lógica do conceito em unidade com a produção histórico-humana desse conhecimento, em que a unidade lógico-histórica possibilite compreender o processo de construção do conceito que se deseja aprender e ensinar, estando o mesmo em relação com sua estrutura interna.

²² Entendemos como Atividade o “[...] processo, produtor do e mediado pelo reflexo psíquico da realidade, responsável por concretizar as relações de caráter objetivo/subjetivo do homem com o mundo e com o gênero humano e satisfazer suas necessidades, promovendo, assim, seu desenvolvimento integral e garantindo a produção e reprodução de sua vida material” (SANTOS; ASBAHR, 2020, p. 5 *apud* LEONTIEV, 1978).



Conexos a esses entendimentos teóricos e sabedores de que somente é possível distinguir o mundo, as coisas, os processos tal qual os instituímos, isto é, na medida em que deles fazemos parte (SILVA, 2018) deve-se atentar para o fato de que professores de matemática em formação podem elaborar e reproduzir a experiência teórica de surgimento e desenvolvimento de conceitos matemáticos imersos no planejamento de situações desencadeadoras da aprendizagem.

Referências

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da Matemática**. Lisboa: Sá da Costa, 1958.

CEDRO, W. L.; MOURA, M. O. O Clube de Matemática: um espaço para a formação inicial de professores que ensinam matemática. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 3, n. 5, 11., 2010. Disponível em: <https://desafioonline.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/2769/2102>. Acesso em: 09 out. 2021.

CEDRO, W. L.; MOURA, M. O. **O motivo e a atividade de aprendizagem do professor de matemática**: uma perspectiva histórico-cultural. 2008. 242p. Tese (Doutorado em Educação: Ensino de Ciências e Matemática). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo. São Paulo. 2008.

CEDRO, W. L.; MOURA, M. O. Possibilidades Metodológicas na Pesquisa em Educação Matemática: o experimento didático. **Educativa**, [S.L.], v. 19, n. 1, p. 121-138, 27 set. 2016. Pontifícia Universidade Católica de Goiás - PUC Goiás.

CECCO, B. L.; BERNARDI, L. T. M. DOS S.; DELIZOICOV, N. C. Formação de Professores que Ensinam Matemática: um olhar sobre as redes sociais e intelectuais do bolema. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, [S.L.], v. 31, n. 59, p. 1101-1122, dez. 2017.

FERREIRA, C. A. **A aprendizagem da docência em matemática a partir da elaboração de uma situação desencadeadora da aprendizagem**. 2019. 159 f.



Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2019.

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978. (Coleção Perspectivas do homem).

LEONTIEV, A. N. **Actividad, consciencia e personalidad**. 2 ed. Cidade de La Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1983.

LIBÂNEO, J. C. **Didática como campo investigativo e disciplinar e seu lugar na formação de professores**. In: Currículo, Didática e Formação de Professores. OLIVEIRA, M. R. N. S.; PACHECO, J. A. B. São Paulo: Papyrus, 2013.

MOISÉS, R. P. **A resolução de problemas na perspectiva histórico/lógica: o problema em movimento**. 1999. 104f. Dissertação (Mestrado em Educação), Faculdade de Educação, USP/SP, 1999.

MOURA, M. O. *et al.* (org.). **Educação Escolar e Pesquisa na Teoria Histórico-Cultural**. São Paulo: Edições Loyla, 2017. 221p.

MOURA, M. O.; LANNER DE MOURA, A. R. **Escola: um espaço cultural**. Matemática na educação infantil: conhecer, (re)criar - um modo de lidar com as dimensões do mundo. São Paulo: Diadema/SECEL, 1998.

MOURA, M. O. A atividade de ensino como unidade formadora, In: CASTRO, A.; CARVALHO, A. (org.) **Ensinar a ensinar**. São Paulo, Pioneira, 2001.

MOURA, M. O. *et al.* Atividade Orientadora de Ensino: fundamentos. **Linhas Críticas**, [S. l.], v. 24, 2019.

MOURA, M. O. *et al.* Atividade Orientadora de Ensino: unidade entre ensino e aprendizagem. **Rev. Diálogo Educ.**, Curitiba, v. 10, n. 29, p. 205-229, jan./abr. 2010.

MOURA, M. O. Pesquisa colaborativa: um foco na ação formadora. In: BARBOSA, R.L.L. (org.) **Trajetórias e perspectivas da formação de educadores**. São Paulo: Editora UNESP, 2004.



MORETTI, V. D. O problema lógico-histórico, aprendizagem conceitual e formação de professores de Matemática. **Poiésis - Revista do Programa de Pós-Graduação em Educação**, [S.L.], v. 8, p. 29-44, 20 mar. 2014. Universidade do Sul de Santa Catarina - UNISUL. <http://dx.doi.org/10.19177/prppge.v8e0201429-44>.

RADFORD, L. **Cognição Matemática**: História, Antropologia e Epistemologia. Sociedade Brasileira de História da Matemática. São Paulo. Editora Livraria da Física, 2011, 342p.

RENSHAW, P. D. **A teoria sociocultural de ensino-aprendizagem**: implicações para o currículo no contexto australiano in Cadernos pedagógicos, no. 18, Secretaria Municipal de Educação de Porto Alegre, 1999.

SILVA, M. M.; CEDRO, W. L. Planejar para quê? Professores de matemática, em formação inicial, aprendendo sobre planejamento. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 9, n. 20, p. 351-374, 22 jan. 2021.

SILVA, M. M.; CEDRO, W. L. Da iniciação à docência à apropriação da atividade pedagógica. In: SILVA, M. M. *et al.* (org.). **Formação do professor de Matemática**: a aprendizagem da atividade pedagógica no pibid. Curitiba: CRV, 2017. p. 27-50.

SILVA, M. M.; CEDRO, W. L. **A apropriação dos aspectos constituintes da atividade pedagógica por professores de matemática em formação inicial**. 2018. 307 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2018.

SOUSA, M. C. O movimento lógico-histórico enquanto perspectiva didática para o ensino de matemática. **Obutchénie. Revista de Didática e Psicologia Pedagógica**, v. 1, n. 4, p. 40-68, 23 maio 2018.

SOUSA, M. C. **O ensino de álgebra numa perspectiva lógico-histórica: um estudo das elaborações correlatas de professores do ensino fundamental**. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2004.



SOUSA, M. C.; MOURA, M. O. **O movimento lógico-histórico em atividades de ensino de matemática:** unidade dialética entre ensino e aprendizagem. Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM –2016.

VIGOTSKI, L. S. **Obras Escogidas.** (Tomo II). Madrid: Visor, 2001.

VIGOTSKI, L. S. **Obras Escogidas.** (Tomo III) . Madrid: Visor, 1995.

VIGOTSKI, L. S. **A formação social da mente.** 7 ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

Recebido em: 09/10/2021.

Aprovado em: 04/05/2022.



DIFICULDADES NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA: qual é o “x” da questão?

DIFFICULTIES IN THE PROCESS OF TEACHING AND LEARNING ALGEBRA: what is the “x” of the question?

Eduardo José de Oliveira Estevão²³
Rinalde Silva Moura²⁴

RESUMO

Este artigo é resultado de um minicurso ministrado no II Encontro das Licenciaturas em Matemática da Universidade Estadual de Goiás (II ENLIM), tendo como embasamento a pesquisa desenvolvida na dissertação de Estevão (2021). Tendo em vista o processo de ensino e aprendizagem de Álgebra, este artigo tem o objetivo de analisar as principais dificuldades que o permeia, especialmente sugerindo soluções para tais sob as perspectivas do desenvolvimento do pensamento algébrico e nas concepções de Álgebra e Educação Algébrica que se estabeleceram ao longo do tempo. Para a identificação dessas dificuldades realizou-se uma pesquisa bibliográfica, de caráter descritiva e exploratória em diversas modalidades de literatura, onde para além disso, com o intuito de nomear, caracterizar e explicar os motivos delas ocorrerem, estabeleceu-se relações entre essas dificuldades a partir de uma análise qualitativa dos fatores dificultadores encontrados, que as dão origem. Assim, foi possível verificar que certas dificuldades podem originar outras, permitindo, portanto, elaborar atividades que podem minimizá-las simultaneamente ao evidenciar as relações existentes entre elas. Dessa forma, os resultados desta pesquisa podem ajudar os professores em sua prática profissional ao refletirem sobre o processo de ensino e aprendizagem de Álgebra, perfazendo um importante subsídio pedagógico para a elaboração de atividades algébricas.

Palavras-chave: Álgebra; Dificuldades; Ensino; Pensamento Algébrico

²³ Mestrado em Matemática – (PROFMAT)/Universidade Federal de Catalão, UFCAT. eduestevao@hotmail.com.

²⁴ Especialização em Educação Matemática/ Universidade Estadual de Goiás, UEG, Câmpus Morrinhos. rinaldesm@yahoo.com.br.



ABSTRACT

This article is the result of a short course given at the II Meeting of Licentiate Degrees in Mathematics at the State University of Goiás (II ENLIM), based on research developed in Estevão (2021) dissertation. This article has as its main objective, the main difficulties encountered in the process of teaching and learning Algebra, suggesting solutions from the perspectives of the development of algebraic thinking and the conceptions of Algebra and Algebraic Education that are established over time. To identify these occurrences, a descriptive and exploratory bibliographic research was carried out in various types of literature, in addition, to name, characterize and explain the reasons for them to occur, to define relationships between these difficulties from of a qualitative analysis of the complicating factors found, which give rise. It was possible to verify that certain difficulties can give rise to others, thus allowing the elaboration of activities that can simultaneously minimize them by highlighting the existing relationships between them. The results of this research can help teachers in their professional practice by reflecting on the teaching and learning process of Algebra, being an important pedagogical subsidy for the development of algebraic activities.

Keywords: Algebra; Difficulties; Teaching; Algebraic Thinking.

Introdução

Segundo o dicionário online de Português, entre as definições da palavra “dificuldade” há a possibilidade de ser “o que impede a realização de uma coisa” ou “aquilo que atrapalha o desenvolvimento de algo” (DIFICULDADE, 2021). Nesse sentido, é comum em sala de aula os estudantes relatarem isso ao tentar compreender a Álgebra, encarando-a como algo difícil de ver sentido e, portanto, acabam cometendo muitos erros. Esses erros por sua vez, passam a significar dificuldades, onde na tentativa de corrigi-los podem recair nos mesmos erros ou em outros semelhantes (SCARLASSARI, 2007).

Estas dificuldades não poderão ser completamente evitadas, afinal elas fazem parte do processo natural de ensino e aprendizagem de Álgebra, cabendo então ao



professor conhecê-las para ser capaz de fornecer maneiras úteis de ajudar seus estudantes a superá-las. É justamente através da análise compartilhada de situações, experiências, pesquisas e relatos que nós professores poderemos enxergar como nossos estudantes encaram os problemas algébricos. Dessa forma, a dificuldade deixa de ser unicamente um estorvo e passa a ser também um recurso pedagógico, pelo qual estudantes e professores tem a possibilidade de refletirem criticamente e conceitualmente sobre o que a originou, ou seja, “qual é o x da questão?”.

Ironicamente, ou não, a Álgebra é encarada por grande maioria das pessoas como o ramo da Matemática que se preocupa justamente em apenas encontrar o x da questão. Essa expressão se remete a concepção que alguns professores e estudantes possuem, de que o ensino de Álgebra é definido somente através de manipulações matemáticas, simplificações de expressões e aplicações mecânicas de fórmulas e regras de procedimento. Entretanto, o ensino da Álgebra envolve um aspecto central, nomeadamente, o desenvolvimento do pensamento algébrico. A Álgebra é também uma forma de pensar, de modo que generalizar e abstrair situações utilizando uma forma de linguagem específica, é uma das mais genuínas expressões do pensamento.

Portanto, o objetivo principal deste artigo é apresentar as principais dificuldades encontradas no processo de ensino e aprendizagem de Álgebra, analisando sobre os fatores que as originaram e as relações que subsistem entre elas. Além disso, refletir sobre sugestões que possam sobretudo ajudar a sanar estas dificuldades, ao passo que ajudam a desenvolver o pensamento algébrico.

Materiais e Métodos



Este artigo é resultado de uma pesquisa de dissertação (ESTEVÃO, 2021), que se concentrou inicialmente em responder à pergunta:

Quais são as principais dificuldades encontradas no processo de ensino e aprendizagem de Álgebra?

Para responder essa pergunta foi realizado um levantamento bibliográfico, abrangendo livros, periódicos, dissertações, teses, jornais, sites da internet, entre outras fontes (MARCONI; LAKATOS, 2003). Dessa forma, obteve-se os dados da pesquisa a serem analisados, proporcionando uma visão geral do problema. Nesse ínterim, entre obter os dados e analisá-los, foi possível observar conexões entre as dificuldades encontradas, surgindo assim mais duas perguntas:

Quais os possíveis fatores originadores destas dificuldades?

Elas se relacionam de alguma forma, levando em conta os fatores listados em b)?

Para responder a segunda pergunta realizou-se uma análise qualitativa das dificuldades, no tocante aos contextos nos quais elas se desenvolvem. Assim, observou-se a existência de certos fatores originadores, que foram nomeados de fatores dificultadores, visto que dificultam o aprendizado. Notou-se ainda, especialmente, que dificuldades diferentes compartilhavam dos mesmos fatores ou dos mesmos conjuntos de fatores dificultadores.

Para responder a terceira pergunta, sintetizamos os dados encontrados em dois quadros para facilitar a análise de relações existentes entre eles e, posteriormente, foi criado mais um terceiro quadro que discrimina os fatores que dão origem a cada dificuldade. Para isso necessitou-se do embasamento teórico de Usiskin (1995) e Fiorentini, Miorim e Miguel (1992, 1993), que tratam das concepções



de Álgebra e educação algébrica firmadas no decorrer da história, além de todo o material consultado que permitiu entender as barreiras que impedem ou dificultam o aprendizado.

Por fim, utilizou-se diagramas para expor as relações existentes entre as dificuldades apresentadas nos quadros supramencionados, contribuindo com a análise e discussão dos resultados.

Referencial teórico

Refletir sobre as dificuldades no processo de ensino e aprendizagem de Álgebra, remete-se a observar como ela é/foi ensinada na Educação Básica e, conseqüentemente, como os estudantes encaram este importante ramo da Matemática. Nesse sentido, entender melhor as concepções de Álgebra e Educação Algébrica podem ajudar a contextualizar as influências que existem entre as dificuldades em Álgebra e as diferentes abordagens dela firmadas ao longo do tempo, considerando os aspectos didáticos, de conteúdos e curriculares.

Para Usiskin (1995) identifica-se quatro concepções de Álgebra: Álgebra como aritmética generalizada, Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas, Álgebra como estudo de relações entre grandezas e Álgebra como estudo de estruturas. Todas essas concepções associam-se ao papel que é atribuído a variável, de modo que as finalidades da Álgebra correspondem diretamente a importância dada aos diferentes usos das letras, conforme mostra o Quadro 1.



Quadro 1 - Síntese das concepções de Álgebra de Usiskin (1995)

Concepção da Álgebra	Uso das variáveis
Aritmética generalizada	Generalizadoras de padrões (traduzir, generalizar)
Meio de resolver certos problemas	Incógnitas, constantes (resolver, simplificar)
Estudo de relações	Argumentos, parâmetros (relacionar, gráficos)
Estrutura	Sinais arbitrários no papel (manipular, justificar)

Fonte: adaptado de Usiskin (1995, p. 20).

Na primeira concepção – Aritmética generalizada – a variável é encarada como generalizadora de modelos. Na segunda concepção – Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas – ao contrário da primeira, as variáveis são encaradas como incógnitas, ou seja, um termo desconhecido, pautando-se especialmente na resolução de equações. Na terceira concepção – Álgebra como estudo de relações entre grandezas – as letras assumem diversos valores, expressando relações entre elas, se preocupando principalmente com as relações funcionais e seus gráficos que descrevem relações entre grandezas. Na quarta e última concepção – Álgebra como estudo de estruturas – as letras são encaradas como símbolos abstratos, por exemplo quando lidamos com às operações com polinômios, sem utilizar nenhum contexto que justifique tais operações.



Ao analisar também as diferentes concepções de educação algébrica, temos o aporte histórico para compreender como o ensino da Álgebra elementar se desenvolveu ao longo do tempo. A partir dos trabalhos de Fiorentini, Miorim e Miguel (1992, 1993) divide-se o desenvolvimento do ensino de Álgebra em três principais concepções: linguístico-pragmática, fundamentalista-estrutural e fundamentalista-analógica.

A primeira concepção – linguístico-pragmática – define a Álgebra como um instrumento técnico e mecânico para resolver problemas, onde acreditava-se que bastava se apropriar do transformismo algébrico para que o estudante conseguisse resolver tais problemas. Na segunda concepção – fundamentalista-estrutural – o objetivo era de fundamentar a matemática escolar, justificando cada passagem do transformismo algébrico através de propriedades. A terceira e última concepção de educação algébrica – fundamentalista-analógica – pretendeu sintetizar as duas anteriores concepções, de forma a recuperar o valor instrumental da Álgebra na resolução de problemas ao mesmo tempo que se preocupava em justificar o cálculo algébrico através de recursos geométricos e visuais.

Para os autores Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 85) todas estas concepções possuem algo negativo em comum: “[...] a redução do pensamento algébrico à linguagem algébrica”. Portanto, ao estudarmos essas concepções de Álgebra e educação algébrica nos sensibilizamos para à necessidade de desenvolver um pensamento que independentemente da linguagem algébrica poderá ser manifestado: o pensamento algébrico.

Uma primeira aproximação que podemos ter acerca do conceito de pensamento algébrico é “[...] desenvolver no estudante um pensamento que o auxilie na busca de padrões e analogias quando enfrentar problemas cotidianos.” (COELHO;



AGUIAR, 2018, p. 178). Não há um consenso sobre a definição desse pensamento, assim, usufruindo da pesquisa de Estevão (2021, p. 56) define-se que:

O pensamento algébrico é um raciocínio que ocorre durante a generalização de um padrão ou de uma regularidade, a determinação de um modelo, a demonstração de uma propriedade, entre outros, em que a manifestação desse pensamento, é mais comumente expressa, na forma de linguagem algébrica escrita.

Pode-se assim, elaborar atividades que estimulem ou incentivem o desenvolvimento deste pensamento, levando em conta os seus aspectos caracterizadores, conforme sugerem Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005): estabelecer relações e comparações entre expressões numéricas ou padrões geométricos; perceber e tentar expressar as estruturas aritméticas de uma situação-problema; produzir mais de um modelo aritmético para uma situação-problema; produzir vários significados para uma mesma expressão numérica; interpretar a igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas; transformar uma expressão aritmética em outra mais simples; desenvolver algum processo de generalização; perceber e tentar expressar regularidades ou invariâncias e desenvolver uma linguagem mais concisa ou sincopada para exprimir as situações-problema.

Este pensamento vai além da tarefa de calcular, ele dá sentido aos símbolos e as formas como os objetos se relacionam, sendo sua essência a generalização de regularidades e padrões. À medida que o estudante aprimora sua forma de pensar e resolver situações algébricas, ele também desenvolverá sua habilidade de exprimir situações através da linguagem algébrica, definindo assim conforme Fiorentini,



Miguel e Miorim (1993) uma relação de subsistência e não de subordinação, entre linguagem e pensamento.

Assim a linguagem algébrica é aprimorada pelo pensamento algébrico e vice-versa, no entanto, o pensamento algébrico pode ser desenvolvido antes mesmo de introduzir uma linguagem formalmente simbólica, tendo em vista que prioriza também a compreensão e a observação de situações pré-algébricas (generalizações aritméticas, padrões numéricos, regularidades envolvendo formas e números etc.) para comunicá-las de algum modo. Segundo Coelho e Aguiar (2018) e Fiorentini, Miguel e Miorim (1993), o pensamento algébrico não aparece somente na Álgebra, ele se desenvolve até mesmo “[...] quando discutimos política ou religião ou mesmo esporte, quer seja quando buscamos padrões ou analogias em nossas argumentações” (COELHO; AGUIAR, 2018, p. 177).

Na próxima seção, utilizando dos referenciais teóricos apresentados, iremos detalhar as dificuldades e os fatores dificultadores encontrados no processo de ensino de Álgebra, para além disso, iremos mostrar as relações existentes entre essas dificuldades e como os resultados disso podem ajudar pedagogicamente os professores de Matemática.

Análise e discussão dos resultados

Sintetizou-se no Quadro 2 as principais dificuldades encontradas no processo de ensino e aprendizagem de álgebra, à partir dos trabalhos de: ARAUJO, 2008; BEZERRA, 2016; BOOTH, 1995; GIL, 2008; ESTEVÃO, 2021; GIL; FELICETTI, 2016; GIRALDO, 2012; GONCALVES, 2013; PONTE, 2005; SCARLASSARI, 2007; SOCAS; CAMACHO; HERNANDEZ, 1998; STOCCO, 2016; TRUJILLO, 2012 e VELOSO; FERREIRA, 2010. Possivelmente não serão listadas todas as dificuldades que existem



nesse tema, no entanto, buscou-se cobrir toda a temática categorizando-as conforme o Quadro 2 abaixo:

Quadro 2 - Principais dificuldades encontradas.

Dificuldades dos estudantes	Representação Simbólica
Dificuldade em passar da linguagem escrita para a linguagem algébrica e vice-versa	LEvsLA
Dificuldade em interpretar as letras	IL
Dificuldade em pensar	P
Dificuldade em entender o que lê e exprimir o que pensa	EEP
Dificuldade em enxergar a utilidade do que está sendo ensinado	Ut
Dificuldade com simplificação de expressões algébricas	SExpA
Dificuldade com a noção de igualdade	Ig
Dificuldade em usar as fórmulas, as propriedades e procedimentos	FPP
Dificuldade em generalizar	G
Dificuldade em memorizar	Mem

Fonte: Estevão (2021, p. 93 e 94).

Como já supramencionado, ao encontrar essas dificuldades identificou-se também os fatores dificultadores estabelecidos mediante os contextos e atividades em que elas se desenvolveram, conforme o Quadro 3.

Quadro 3 – Principais fatores dificultadores

Fatores Dificultadores	Símbolo
Conhecimento sobre símbolos e seus significados	F1
Diversos usos para as letras	F2
Falta de atividades ligadas à leitura	F3
Falta de estímulos ao raciocínio	F4
Uso inapropriado de letras pelo professor	F5
Metodologia empregue pelo professor que induz em erro	F6
Falta de aplicações em outras áreas de conhecimento	F7
Aplicações desconexas da realidade	F8
Ensino baseado em memorização de fórmulas e procedimentos	F9
Compartimentalização da Álgebra e aritmética	F10
Erros originados em aritmética e transferidos para a Álgebra	F11
Uso de métodos informais	F12
Falta de atividades voltadas à memorização	F13

Fonte: Estevão (2021, p. 87 e 88).

Ao levar em conta os referenciais teóricos já citados neste artigo e os trabalhos onde encontramos os dados, justificamos o porquê certos fatores dificultadores levam o surgimento de dadas dificuldades, conforme resumido no Quadro 4.



Quadro 4 - Fatores dificultadores associados às dificuldades

DIFICULDADES	FATORES DIFICULTADORES
P	F3, F4, F9, F13
LEvsLA	F1, F2, F3, F4, F13
EEP	F1, F2, F3, F4
IL	F1, F2, F5, F13
Ut	F7, F8, F9
SExpA	F1, F2, F6, F8, F9, F10, F11, F13
Ig	F1, F2, F6, F8, F9, F10, F11, F12
FPP	F1, F2, F4, F7, F8, F9, F10, F12, F13
G	F1, F2, F4, F7, F8, F9, F10
Mem	F3, F4, F13

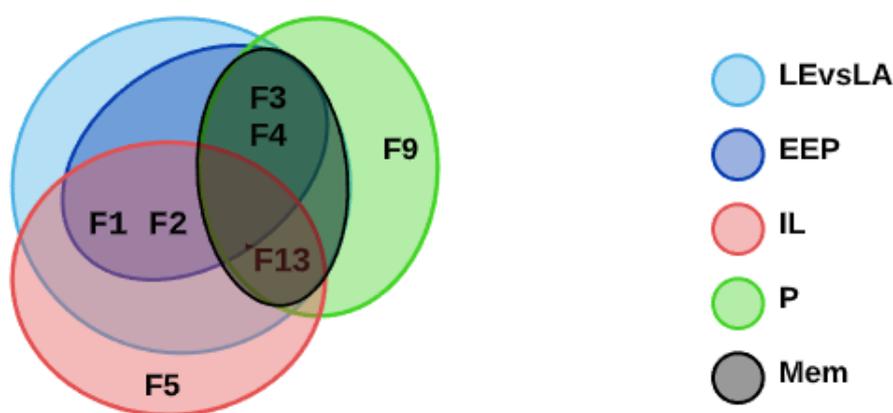
Fonte: Estevão (2021, p. 104).

Esse último quadro nos possibilita observar que existem algumas intersecções entre as dificuldades ao levar em conta os fatores dificultadores que as originam, mostrando assim que, mesmo sendo diferentes elas podem ter a(s) mesma(s) origem(ns). Essas relações serão mais bem explicadas nos parágrafos seguintes utilizando diagramas, baseados nos fatores dificultadores comuns entre as diferentes dificuldades.

Na Figura 1 temos inicialmente, que a dificuldade em passar da linguagem escrita para a linguagem algébrica e vice-versa (LEvsLA), pode ser causada pelas dificuldades em entender o que lê e exprimir o que pensa (EEP), e em memorizar

(Men); visto que a primeira é a união dos fatores dificultadores das outras duas. Além disso observamos que na dificuldade em interpretar as letras (IL), há grandes similaridades quanto aos fatores dificultadores, com a dificuldade em passar da linguagem escrita para a linguagem algébrica e vice-versa (LEvsLA)

Figura 1 - Relação entre LEvsLA, EEP, IL, P e Mem



Fonte: Estevão (2021, p. 105).

Conclui-se, portanto, que se o estudante não compreende o que lê, de forma a memorizar informações e inter-relacioná-las com conceitos algébricos também previamente memorizados, ele não será bem-sucedido ao se comunicar algebricamente, seja de forma escrita ou verbal. Portanto, para traduzir um problema para a linguagem escrita ou algébrica é necessário compreender aquilo que se lê, para isso é necessário interpretar e, para este último ato é necessário ter o hábito da leitura. Por outro lado, também é indispensável memorizar e compreender informações e símbolos, para que assim seja possível exprimir este entendimento mediante à linguagem.

Utilizando-se das concepções de Usiskin (1995), vimos que as letras podem ter diversos usos, onde em cada uma delas é atribuído significado e importantes utilidades. Quando o estudante não reconhece se uma dada letra é uma variável, ou incógnita, um parâmetro ou ainda uma constante, ele não consegue compreender os motivos que levaram a utilizar aquela letra naquele contexto, conseqüentemente ele não dá significado a ela. Por fim, isso o impedirá de interpretar efetivamente o que está sendo lido, o que também acarreta à dificuldade em traduzir as linguagens.

Outra relação que podemos observar é entre as dificuldades em usar as fórmulas, propriedades e procedimentos (FPP), em enxergar utilidade do que está sendo ensinado (Ut) e em generalizar: onde G engloba todos os fatores de Ut, e FPP os de G, conforme a Figura 2.

Figura 2 - Relação entre Ut, G e FPP



Fonte: Estevão (2021, p. 106).

Em uma análise inicial, entre as dificuldades em enxergar utilidade no ensino e em generalizar, retomamos à alguns conceitos apresentados em seções anteriores

deste artigo, aonde vimos que a Álgebra é vista como uma útil ferramenta generalizadora, sendo umas das concepções de Álgebra de Usiskin (1995) e Lins e Gimenez (2001): a Aritmética generalizada. No entanto, conforme Usiskin (1995), encararmos a Álgebra sob uma única concepção (a qual é baseada no uso das variáveis) é supersimplificar seu ensino. Dessa forma, o ideal é utilizar as diversas concepções para dar sentido ao ensino de Álgebra.

Conforme Fiorentini, Miguel e Miorim (1993) e Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005) atividades que envolvam aspectos caracterizadores do pensamento algébrico, como a generalização, são essenciais para a subsistência do pensamento e linguagem e, conseqüentemente, levar os estudantes a darem utilidade aos conceitos ensinados de Álgebra.

Nesse sentido que se justifica a relação anteriormente apresentada com a dificuldade em usar as fórmulas, as propriedades e procedimentos (FPP): levar os estudantes a enxergar utilidade no que está sendo ensinado em Álgebra envolve também dar significados aos conceitos ensinados para a utilização dentro da própria Matemática (fórmulas, propriedades e procedimentos) ou outras áreas de conhecimento, ajudando-os a memorizá-los.

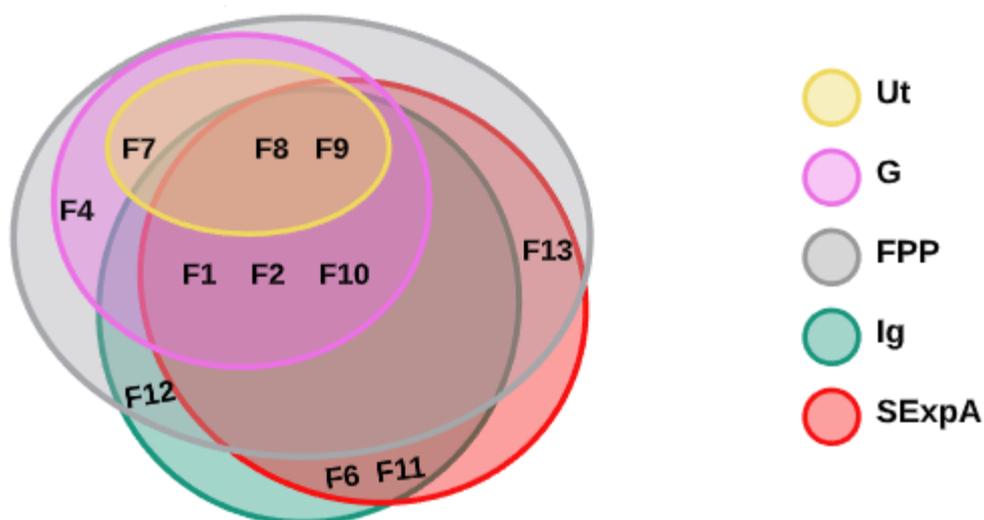
Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) sugerem o ensino de uma Álgebra para além dos muros das escolas. No entanto, para isso é necessário que o estudante consiga enxergar como os conteúdos algébricos podem ser úteis na sua vida cotidiana e profissional, sendo assim, a generalização uma ferramenta importante para alcançar tais objetivos.

Outra relação que também podemos citar é entre as dificuldades de enxergar utilidade do que está sendo ensinado (Ut), de generalizar (G), em usar fórmulas,



propriedades e procedimentos (FPP), com a noção de igualdade (lg) e de simplificação de expressões algébricas (SExpA), como observado na Figura 3.

Figura 3 - Relação entre Ut, G, FPP, lg e SExpA



Fonte: Estevão (2021, p. 107).

Observa-se que as dificuldades com a noção de igualdade (lg) e usar fórmulas, propriedades e procedimentos (FPP), possuem 6 fatores dificultadores em comum e as dificuldades com a noção de igualdade (lg) e simplificação de expressões algébricas (SExpA), possuem sete fatores em comum. Isso nos mostra que os estudantes têm dificuldade em utilizar as propriedades e procedimentos para resolver/simplificar uma expressão algébrica, a qual muitas vezes está contida em uma igualdade. Essa relação remete-se especialmente nos erros cometidos nas

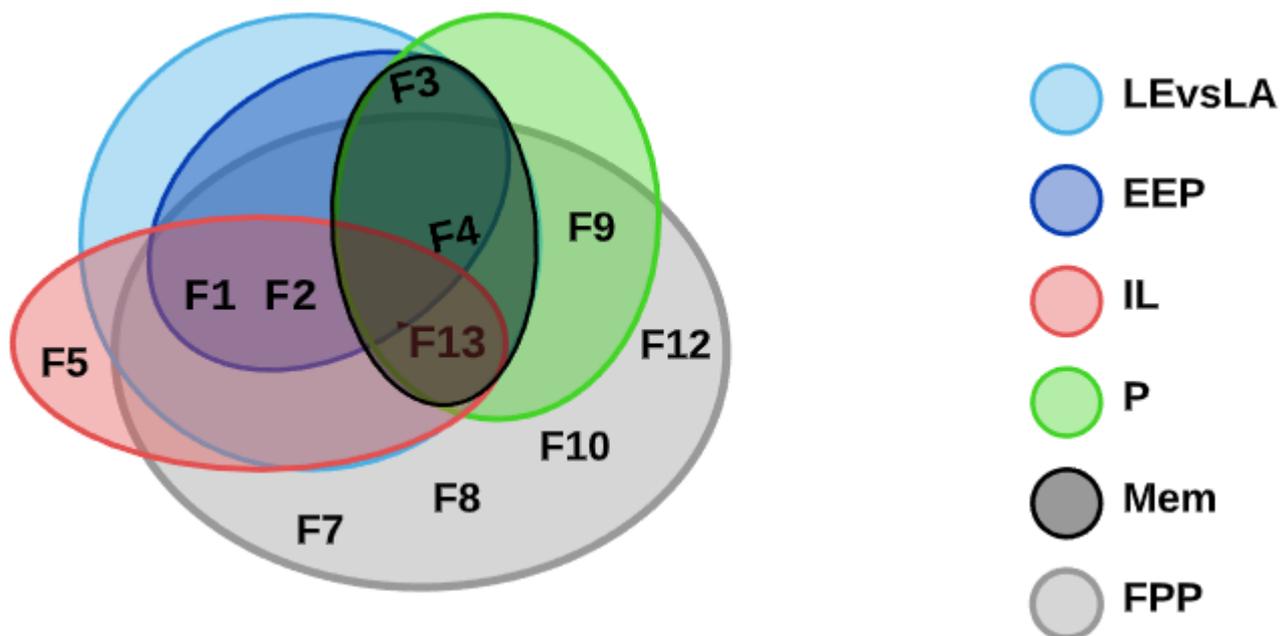
equações, onde simplificar as expressões algébricas inclusas na relação de igualdade, tem a mesma ideia de resolver a equação.

Erros relacionados com a noção de igualdade acontecem muitas vezes quando os estudantes a encaram como algo unidirecional, de maneira que o resultado “numérico” sempre está no lado direito de uma equação. Sobre isso a BNCC corrobora com Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) e Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), indicando que o pensamento algébrico se desenvolve quando o estudante vai da observação até a generalização e, nesse percurso uma das bases é enxergar a igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas e estabelecer a partir da igualdade relações para expressar regularidades. Isso minimizaria à dificuldade em lidar com fórmulas e propriedades, pois ajudariam a compreender como ocorrem alguns procedimentos.

Ainda detalhando as relações dessa pesquisa, notamos que os fatores dificultadores que originam a dificuldade em memorizar (Mem) estão presentes em diversas outras dificuldades, conforme a Figura 4.



Figura 4 - Relação entre FPP, LEvsLA, P, EEP e Mem



Fonte: Estevão (2021, p. 107).

Isso pode sinalizar que atividades que ajudem a estimular a capacidade de memorização, a partir da compreensão e produção de significado, podem ajudar a minimizar outras dificuldades.

Analisar essas relações supramencionadas poderão ajudar professores a desenvolver atividades direcionadas a ultrapassar as dificuldades encontradas no processo de ensino e aprendizagem de Álgebra, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento e linguagem algébricos.

Considerações finais

Com este artigo procurou-se apresentar as principais dificuldades encontradas no processo de ensino e aprendizagem de Álgebra e como elas se relacionam através dos fatores dificultadores. Isso permitiu observar que certas dificuldades podem originar outras, reciprocamente, tratando de uma pode-se ajudar a minimizar outra. Além disso, conhecer os motivos pelos quais elas se originam possibilita o professor diagnosticá-las mais eficazmente e montar planos de ações para minimizá-las. Assim, a partir dos quadros e diagramas aqui apresentados, pode-se elaborar atividades que ajudam a sanar algumas dessas dificuldades simultaneamente.

Nota-se que o melhor caminho a seguir no ensino de Álgebra é aquele que desenvolve o pensamento algébrico, priorizando não somente a linguagem, mas também a compreensão e o raciocínio. Portanto, cabe a cada um de nós professores constantemente refletirmos sobre as dificuldades que nossos estudantes enfrentam a fim de traçarmos meios úteis de ajudá-los a superá-las.

Referências

ARAUJO, E. A. de. Ensino de Álgebra e Formação de Professores. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, s.l., v. 10, n. 2, mar. 2008.

BEZERRA, A. R. L. **Ensino da Álgebra**: uso da linguagem e do pensamento algébrico como ferramenta de aprendizagem na educação básica. 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – polo da Fundação Universidade Federal de Rondônia, Porto Velho, 2016.



BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em Álgebra. Tradução de: Hygino H. Domingues. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (org). **As ideias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

COELHO, F. U.; AGUIAR, M. A história da Álgebra e o pensamento algébrico: correlações com o ensino. **Estudos Avançados**, São Paulo, v. 32, n.94, p. 171-187, 2018.

DIFICULDADE. In: DICIO, Dicionário online de Português. Porto: 7 graus, 2021. Disponível em: <https://www.dicio.com.br/dificuldade/>. Acesso em: 10 ago. 2021.

ESTEVÃO, E. J. de O. **Dificuldades na aprendizagem e ensino de álgebra**: atividades propostas para minimizar essas dificuldades. 2020. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) –Universidade Federal de Catalão, Catalão, 2021.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Álgebra ou Geometria: para onde Pende o Pêndulo? **Pro-posições**, Campinas, v. 3, n. 1, p. 39-54, mar. 1992.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuições para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar. **Pro-posições**, Campinas, v. 4, n. 1, p. 78-91, mar. 1993.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVÃO, E M. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: **Seminário Luso-brasileiro**: investigações matemáticas no currículo e na formação de professores, 2005, Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

GIL, K. H. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de Álgebra**. 2008. Dissertação (Mestrado de Educação em Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.



GIL, K. H.; FELICETTI, V. L. Reflexões sobre as dificuldades apresentadas na aprendizagem da Álgebra por Estudante da 7ª Série. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, Aracaju, v. 1, n. 1, p. 19-35, 17 ago. 2016.

GIRALDO, V.; CAETANO, P.; MATOS, F. **Recursos computacionais no ensino de Matemática**. SBM, Rio de Janeiro, 2013.

GONÇALVES, J. A. **Dificuldades dos Alunos que Iniciam o Estudo da Álgebra**. 2013. 43 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) -Faculdade de Pará de Minas, Pará de Minas, 2013.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica**. 5 ed. São Paulo: Atlas, 2003.

PONTE, J. P. **Álgebra no currículo escolar**. Educação e Matemática, n. 85, 2005.

SCARLASSARI, N. T. **Um estudo de dificuldades ao aprender Álgebra em situações diferenciadas de ensino em alunos da 6ª série do ensino fundamental**. 2007. 135 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2007.

SOCAS, M. M.; CAMACHO M.; HERNANDEZ J. **Análisis Didáctico Del Lenguaje Algebraico En La Enseñanza Secundaria**. **Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado: didácticas de las matemáticas para los profesores de educación secundaria**, n. 32, p. 73-86, mai. 1998.

STOCCO, A. C. A Álgebra e suas dificuldades no ensino médio. *In*: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. **Os Desafios da Escola Pública**

Paranaense na Perspectiva do Professor PDE, 2014. Curitiba: SEED/PR., 2016. V.1. (Cadernos PDE).

TRUJILLO, E. S. G. **Del Lenguaje natural al Lenguaje algebraico**: El significado de la variable.: una propuesta didáctica basada en el planteamiento y resolución de



problemas. 2012. 82 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Nacional de Colômbia, Bogotá, 2012.

USISKIN, Z. Conceções sobre a Álgebra da Escola Média e utilização de variáveis. Tradução de: Hygino H. Domingues. *In*: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (org.). **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p. 9-22.

VELOSO, D. S.; FERREIRA, A. C. Uma reflexão sobre as dificuldades dos alunos que se iniciam no estudo da Álgebra. *In*: X Semana da Matemática e II Semana da Estatística, 10., 2010, Ouro Preto. **Revista da Educação Matemática da UFOP**. Ouro Preto: Editora da UFOP, 2010. p. 59-65

Recebido em: 09/10/2021.

Aprovado em: 04/05/2022.



SEQUÊNCIA DE FIBONACCI NO ENSINO DA MATEMÁTICA

FIBONACCI SEQUENCE IN MATH TEACHING

Rosane da Silva Rocha²⁵

Rodrigo Bastos Daude²⁶

Resumo

Esse artigo tem como base um Trabalho de Conclusão de Curso que teve como objetivo o estudo da Sequência de Fibonacci, desde seu contexto histórico para entender seu desenvolvimento, até suas aplicações para melhor entendimento. Além disso, estudar a possível relação com o retângulo de ouro e a proporção áurea, que foi inicialmente o problema a ser resolvido durante a pesquisa, e se haveria a possibilidade dessa sequência ser abordada em sala de aula. Foi uma pesquisa bibliográfica, qualitativa e com análise de conteúdo. A Sequência de Fibonacci surgiu por meio de um problema matemático sobre reprodução de coelhos, possui variadas aplicações em áreas diferentes de conhecimento como arquitetura, economia, zoologia, além de ter aplicações que podem ser feitas em sala de aula para despertar o interesse do aluno em diferentes conteúdos. No presente artigo será usado como principais referenciais teóricos, Koshy (2018), Zahn (2011) e Biembengut (1996). Porém serão usados outros que complementarão o texto para seu melhor desenvolvimento.

Palavras chave: Sequência de Fibonacci; Número de Ouro; Aplicações;

Abstract

This article is based on a Course Conclusion Work that aimed to study the Fibonacci Sequence, from its historical context to understand its development, to its applications for better understanding. Furthermore, to study the possible relationship with the golden rectangle and the golden ratio, which was initially the problem to be solved during the research, and if there would be a possibility for this sequence to be approached in the

²⁵ Licenciada em matemática pela Universidade Estadual de Goiás – Campus Cora Coralina – Sede Goiás.

²⁶ Docente do curso de licenciatura em matemática da Universidade Estadual de Goiás – Campus Cora Coralina – Sede Goiás.



classroom. It was a bibliographical research, qualitative and with content analysis. The Fibonacci Sequence arose from a mathematical problem about rabbit reproduction, it has several applications in different areas of knowledge such as architecture, economics, zoology, in addition to having very interesting applications that can be made in the classroom to arouse student interest in different contents. In this article, Koshy (2018), Zahn (2011) and Biembengut (1996) will be used as the main theoretical references. However, others will be used that will complement the text for its better development.

Keywords: Fibonacci Sequence; Gold Number; Applications;

Introdução

A matemática não é uma ciência de fácil entendimento, se não bem explicada pode ficar mais complexa para quem não tem afinidade com os números. Além disso, a matriz curricular é extensa e os professores ficam sobrecarregados para tentar suprir a necessidade que o Estado tem de pensar em quantidade e não qualidade. Ademais que prender a atenção do aluno por determinado tempo não é fácil, pois sua concentração depende de seu interesse pelo conteúdo aplicado, e da maneira que é aplicado.

Pensando nisto, este trabalho tem por objetivo mostrar que a Sequência de Fibonacci não sendo um assunto de fácil entendimento, é possível ser aplicada dentro de uma sala de aula, despertando a atenção do aluno e facilitando a aprendizagem.

O presente artigo é um estudo de livros que falam sobre a Sequência de Fibonacci, com opiniões iguais ou não analisadas e expostas da melhor maneira para o melhor entendimento. Assim, pode-se afirmar que esse é um trabalho qualitativo, bibliográfico, com análise de conteúdo.

O ser humano evolui de acordo com sua necessidade de mudança. E de acordo com que sua evolução sucede o meio em sua volta evolui também, e é assim que



acontece as invenções e inovações. A história dos números não poderia ter ocorrida de maneira diferente, Segundo Eves (2004), a matemática básica foi desenvolvida pelo aumento de produção dada pela agricultura, pois com o aumento da população houve um crescimento considerável na produção e conseqüentemente o aumento de riquezas.

O desenvolvimento do conceito de número, apesar de ter sido impulsionado por necessidades concretas, implica um tipo de abstração. Quando dizemos "abstrato" é necessário tornar preciso o significado desse termo, pois a dicotomia entre concreto e abstrato, evocada frequentemente em relação à ideia de número, dificulta a compreensão do que está em jogo. Contar é concreto, mas usar um mesmo número para expressar quantidades iguais de coisas distintas é um procedimento abstrato. A matemática antiga não era puramente empírica nem envolvia somente problemas práticos. Ela evoluiu pelo aprimoramento de suas técnicas, que permitem ou não que certos problemas sejam expressos. Afinal, uma sociedade só se põe as questões que ela tem meios para resolver, ou ao menos enunciar. As técnicas, no entanto, estão intimamente relacionadas ao desenvolvimento da matemática e não podem ser consideradas nem concretas nem abstratas. (ROQUE, 2012, p. 28).

Ainda segundo Eves (2004), as civilizações antigas se aglomeravam pertos dos rios para facilitar a produção de alimentos e criação de animais. Com o tempo, com a necessidade aumentando foi surgindo a geometria, para o cálculo de área da terra. Percebe-se aí, que a matemática surge para ajudar o ser humano no dia a dia. Roque (2012), salienta que o surgimento dos números não pode ser comprovado, por não ter nenhum tipo de prova escrita.

Roque (2012), fala que o crescimento da população na antiga Mesopotâmia, desenvolveu o que se conhece hoje por cidades, e para facilitar a vida em sociedade



foram surgindo as escritas. Os Sumérios usavam as argilas para marcar suas riquezas, um modo de controlar a quantidade de bens que tinham. Já os egípcios, por sua vez, escreviam em papiros, que não eram escritos por qualquer pessoa, apenas os escribas eram autorizados. Esses papiros eram escritos na intenção de facilitar a vida da população futuramente. O mais conhecido é o Papiro Rhind que contia a matemática que conheciam naquela época.

Assim, com o aumento de riquezas e de população, houve a necessidade de evolução da escrita, foram aos poucos agrupados e sistematizados, transformando aquilo que tinham (números), em sequências. Moura e Ponossian (2012), falam que o surgimento do calendário, se deu pela observação que os egípcios faziam das enchentes do Rio Nilo. Isso foi possível, pelo seguimento de um padrão. Segundo Júnior (2017, p. 3), esses padrões matemáticos ocorrem de forma banal, “por exemplo, nas estações do ano, [...], nas placas dos veículos”. Esses padrões numéricos são considerados progressões. Ainda de acordo com Júnior (2017), a criação do calendário, é o princípio da história das progressões.

As sequências numéricas não surgem do nada, elas seguem uma lei de formação para existirem, e por meio dessa lei um termo da sequência depende do outro, e também por meio dessa lei pode-se perceber se uma sequência é finita ou não. Um exemplo, é a sequência de números pares, que tem como lei de formação $2n$ e os números ímpares $2n+1$.

Uma sequência que chama a atenção de matemáticos e cientistas até nos dias atuais, que teve seu surgimento por meio de um problema hipotético de reprodução de coelhos, conhecida como Sequência de Fibonacci. Essa sequência numérica tem uma peculiaridade, existem propriedades nela que intrigam cientistas de todo



mundo. Além de suas aplicações que podem ser vistas na natureza na arte e entre outras áreas de conhecimento.

Sequência de Fibonacci

O criador da Sequência de Fibonacci, segundo Zanh (2011), é um italiano chamado Leonardo de Pisa, nascido por volta de 1170. Por seu pai ser diretamente ligado ao comércio, foi convidado a trabalhar na Alfandega na África, o que acarretou o início dos estudos de Leonardo com professores islâmicos. Isso despertou seu interesse pelos números. Com esses professores Leonardo aprendeu o sistema de numeração hindu-arábico que pouco era conhecido naquela época.

De acordo com Koshy (2018), quando Leonardo de Pisa voltou à Europa em 1202, escreveu o um livro, o "Liber Abacci" que falava do sistema de numeração hindu-arábico, que foi uma revelação naquela época, pois ainda era usado o sistema de numeração romana. Ainda de acordo com Koshy (2018), foi Édouard Lucas que nomeou a sequência numérica como Sequência de Fibonacci. E Leonardo de Pisa passou a ser conhecido pelo nome que foi recebido a sua sequência Leonardo Fibonacci.

Conforme Koshy (2018), Fibonacci (como será mencionado Leonardo de Pisa de agora em diante), ficou famoso pela sequência que leva seu nome, mas não deveria ter sido, pois ele foi o influenciador do uso do sistema de numeração que usamos nos dias atuais, o sistema hindu-arábico, além disso escreveu vários livros que influenciaram na matemática que conhecemos hoje.

A Sequência de Fibonacci se deu pelo seguinte problema: "Se em um recinto fechado for colocado um casal de coelhos, que demore um mês para estar pronto para o cruzamento e mais um mês para reproduzir. Supondo que esse casal tenha



outro casal de coelhos, quantos casais terão nesse recinto ao final de um ano, desconsiderando a mortalidade?"²⁷

Resolução: No primeiro mês tem-se apenas o casal de coelhos que foram colocados no recinto, chamaremos de C1, como demoram um mês para estar prontos para reprodução, no segundo mês haverá apenas o mesmo casal. No terceiro mês, C1 terá um casal de filhotes que será nomeado de C2. No quarto mês C1 reproduzirá mais uma vez, tendo o casal de coelhos C3, enquanto o casal de coelhos C2 amadurece para reprodução. Se esse padrão continua no decorrer de doze meses, surge a seguinte sequência numérica.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144...

$F_1 = F_2 = 1$ Essa sequência é chamada
Sequência de Fibonacci, que tem

como lei de formação a soma de dois números consecutivos da sequência, e o resultado é o próximo termo dessa mesma sequência numérica. Assim temos por definição matemática que, "Sequência de Fibonacci é uma sequência numérica, onde o próximo termo é a soma dos dois anteriores e que segue a lei de formação recursiva, com a condição inicial, para qualquer n maior ou igual a 2."

De acordo com Voroviov (1974), as sequências devem ter uma condição que as inicie, e uma equação de recorrência que mostre o padrão a ser seguido. Estando assim diretamente ligadas, pois se a Sequência de Fibonacci não tiver uma condição inicial, pode ser qualquer sequência numérica aleatória que condiz com fórmula de

²⁷ Esse problema é uma adaptação do problema hipotético, criado originalmente por Leonardo Fibonacci, que deu início a Sequência de Fibonacci.



recorrência, por exemplo a sequência: 2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, ... que também segue sendo a soma de números quaisquer consecutivos.

Com a condição inicial e a equação de recorrência da Sequência de Fibonacci segue abaixo a lista dos seus 20 primeiros termos:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765.

A Sequência de Fibonacci possui inúmeras propriedades que podem ser demonstradas matematicamente. Algumas possui facilidade de se interpretar e outras não. Porém uma das propriedades é a razão que ela possui entre seus termos, e que pode ser mostrada geometricamente de maneira fascinante. Algumas das propriedades da Sequência de Fibonacci estão listadas a seguir.

1. Soma dos n primeiros números da Sequência de Fibonacci é igual a $F_{n+2} - 1$.
1. O máximo divisor comum de dois números da Sequência de Fibonacci resulta em outro número da Sequência.
2. Dois números consecutivos da Sequência de Fibonacci são primos entre si.
3. Dados k, n , temos que F_{kn} é múltiplo de F_k .
4. Os números da Sequência de Fibonacci revelam determinantes igual a zero.
5. A razão entre dois termos consecutivos da Sequência de Fibonacci se aproxima de 1,618.

A propriedade 6 fala de uma razão denominada proporção áurea, representada pela letra grega ϕ (phi, lê-se "fi") também conhecida por número de ouro e razão de ouro; e tem valor numérico de 1,618 e seu



recíproco 0,618. De acordo com Huntley (1985), já foi comprovado que o número de ouro e seu recíproco são exatamente iguais em 4598 casas decimais.

O número de ouro é a razão de um número pertencente a Sequência de Fibonacci e seu antecessor, também pertencente a Sequência de Fibonacci. Já o recíproco 0,618 ocorre ao contrário, é a razão de um número e seu sucessor, ambos pertencentes a Sequência de Fibonacci. Por definição matemática temos que o número de ouro de acordo com a Sequência de Fibonacci, é a razão dada entre dois números consecutivos dessa mesma sequência, que quanto maiores mais próximo se chega a essa razão.

Essa aproximação ocorre do quinto número Fibonacci em diante. No entanto quanto maior for o número mais próximo se chega à razão desejada. O número de ouro já era conhecido antes da existência da Sequência de Fibonacci, o que torna essa sequência mais interessante e intrigante, pois não se sabe se foi intencional a razão entre esses números.

O símbolo da Escola Pitagórica²⁸ era um pentagrama, um símbolo que possui em seu desenho várias propriedades envolvendo o número de ouro. Ademais o matemático e filósofo Pitágoras, usava essa proporção para demonstrar geometricamente figuras regulares traçadas por retas, e seus seguidores tinham um interesse especial na divisão áurea. pode-se perceber então, que o conhecimento dessa razão já existia bem antes de Fibonacci criar sua sequência.

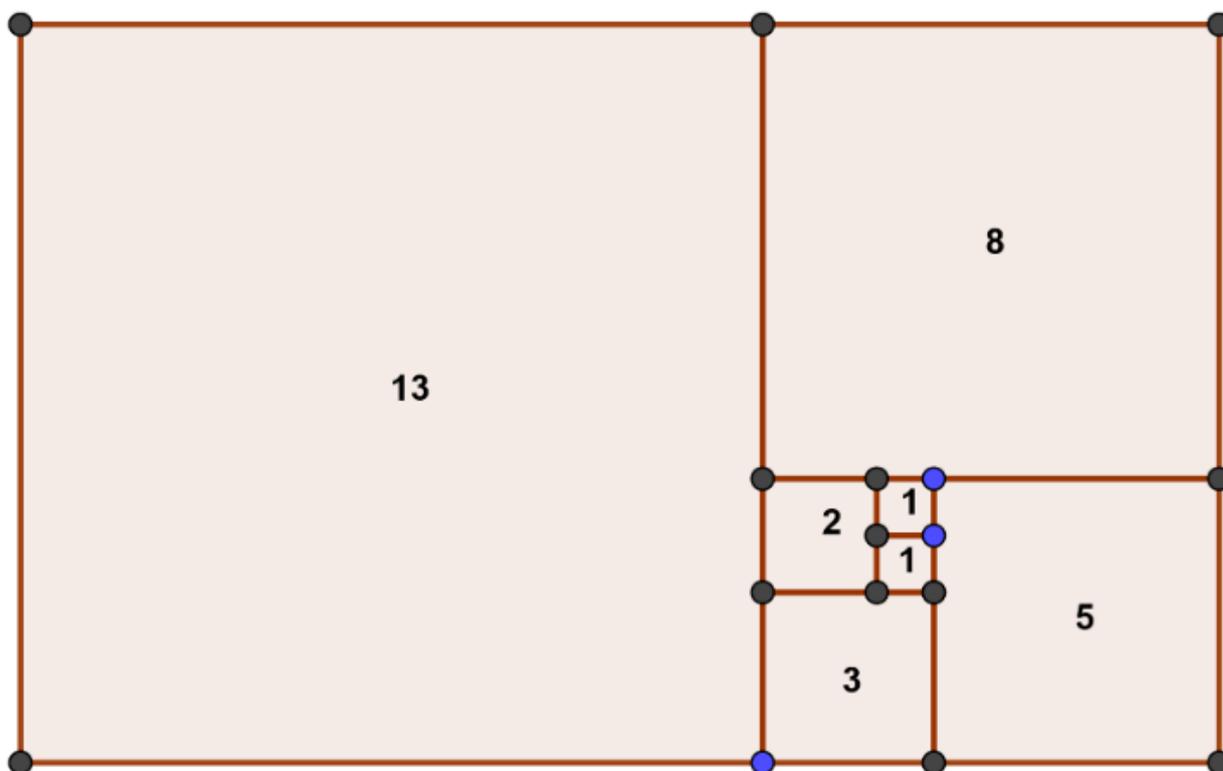
Segundo Huntley (1985), o número de ouro era deslumbrante para os gregos, por isso o motivo do pentagrama ser o símbolo da escola pitagórica, por ele ser traçado por retas que estão em proporção áurea. Euclides, conhecido como pai da

²⁸ Escola fundada por Pitágoras, considerado por muitos como uma seita, pois mantinham sigilo de tudo o que faziam e para fazer parte tinham que fazer um juramento.



geometria, escreveu sobre essa a divisão áurea em uma reta, que depois foi usada para desenhar um retângulo na proporção áurea, conhecido como retângulo de ouro²⁹, pois seus lados seguem essa razão.

Figura 1 – Retângulo de Ouro



Fonte: Da própria autora

O retângulo de ouro é uma figura geométrica que é desenhado por meio da reta de Euclides, mas que também pode ser desenhado usando a Sequência de Fibonacci e mesmo assim continuará com proporções áureas. Desse retângulo surge uma espiral, que cresce infinitamente juntamente com o retângulo de ouro, que também tem proporções áureas, a espiral logarítmica. De acordo com Belini (2015, p.

²⁹ Também chamado de retângulo áureo.

25), uma propriedade desse retângulo, é “que sempre é possível extrair dele um quadrado e continuar com um retângulo áureo num processo infinito.”

A natureza já tem uma beleza contagiante, onde muitos cientistas acreditam que é um calmante natural. Tanto a fauna quanto a flora, encantam a todos, com suas peculiaridades. A matemática também possui uma beleza que encanta quem a domina, mesmo com seus cálculos extensos e complexos. E é isso que torna a Sequência de Fibonacci tão magnífica, porque consegue unir essas duas belezas, e as tornam mais interessantes.

Deixe sua imaginação subir. Pense no universo, nas constelações, na galáxia. Contemplem a beleza e a forma de todas as maravilhas da natureza: os oceanos, as flores, a flora, os animais e até o microrganismo no ar que respiramos. Pense mais nas realizações do homem nos campos da ciência natural, na teoria nuclear, da rádio e da televisão. Pode surpreendê-lo saber que tudo isso tem uma coisa em comum – a Sequência de Fibonacci. (FISHER, 1993, p. 6).

A Sequência de Fibonacci é uma sequência numérica que impressiona, encanta e desperta a atenção por ter aplicações matemáticas que podem ser encontradas no dia a dia. Muitos alunos temem a matemática pelo preconceito que a sociedade trás de disciplina que poucos conseguem, por seus temíveis cálculos, porém pode se perceber que é uma disciplina para todos, com certeza tem pessoas que têm mais facilidade, mas isso acontece em qualquer área de conhecimento.

A Sequência de Fibonacci pode ser de grande utilidade para professores não somente de matemática, para despertar o interesse dos alunos em querer aprender o conteúdo. Por proporcionar uma aula interessante e sair da aula tradicional de



somente quadro e giz. No próximo tópico será relatado variadas aplicações em várias áreas de conhecimento, inclusive a sala de aula.

Aplicações da Sequência de Fibonacci

A natureza é repleta de aplicações da Sequência de Fibonacci podendo ser percebida na quantidade de pétalas de flores, como as margaridas que variam com números 5, 21, 34 e 55, pertencentes a sequência. Os girassóis possuem espirais formadas por suas sementes que estão dispostas no sentido horário e anti-horário. A quantidade de espirais é na maioria das vezes dois números consecutivos da Sequência de Fibonacci (nos girassóis maduros), 34 e 55, 55 e 89, podendo até chegar em 89 e 144 espirais segundo Koshy (2018). Além das margaridas e girassóis, existem outras flores conhecidas que seguem o padrão da Sequência de Fibonacci, pois a maioria delas possuem 5, 13 e 34 pétalas, números Fibonacci.

Algumas plantas seguem um determinado padrão de crescimento para que todas as folhas consigam receber a luz do sol e captar a água da chuva³⁰. Essa disposição que as folhas apresentam recebe o nome de filotaxia, que segundo Huntley (1985, p. 157), “[...] é um termo de botânica para um tópico que inclui a disposição das folhas nos ramos das plantas.”

Algumas frutas têm indícios da Sequência de Fibonacci, onde pode ser observado o retângulo de ouro e a espiral logarítmica. De acordo com Koshy (2018), podem ser encontrados nas pinhas, nas alcachofras que formam espirais no sentido horário e anti-horário, parecido com o padrão dos girassóis. Nos abacaxis formam

³⁰ Embora isso dependa de cada espécie.



espirais num padrão diferente por ter a casca com escamas em formato de hexágono, mas que também segue o padrão de espirais Fibonacci.

A Sequência de Fibonacci está presente não somente na flora, mas também na fauna. O mais comum e comentado quando se fala de aplicação da Sequência de Fibonacci na natureza, especificamente na fauna, é a concha do Nautilus. Segundo Huntley (1985), a concha possui uma estrutura com câmaras formando uma espiral logarítmica, e que quando cresce o tamanho das câmaras aumentam, porém, sua estrutura não se modifica, continuando assim a espiral na mesma proporção.

Figura 2 – Concha do Nautilus



Fonte: Akkana Peck *apud* blog mcientifica.

De acordo com Silva (2015), a concha do Nautilus é uma descrição perfeita da razão áurea. Celuque (2004), afirma que a concha é uma construção de retângulos de

109



ouro, que por esse motivo a razão da largura pela altura se aproxima do número de ouro.

A Sequência de Fibonacci está presente na reprodução das abelhas (na árvore genealógica dos zangões) e dentro da colmeia, nos caminhos que elas podem seguir. No jeito de caçar dos falcões peregrinos, que formam uma espiral logarítmica para não perder sua presa de vista.

A Sequência de Fibonacci também se faz presente na música: no piano e na Sinfonia de Beethoven. Na arquitetura: nas pirâmides do Egito e nas ruínas de Parthenon. Na arte: nos quadros de Leonardo da Vinci, como "Mona Lisa" e "A Anunciação", "o nascimento de Vênus" de Sandro Botticelli e na "A criação do homem" de Michelangelo, de acordo Celuque (2004) e Zahn (2011), são artes que têm como destaque a proporção áurea e o retângulo de ouro.

Na Economia, a Sequência de Fibonacci e o número de ouro são usados para fazer aplicações na bolsa de valores, porém precisa de ter um software específico e um vasto conhecimento em economia. Na Física a Sequência de Fibonacci está presente na óptica, que de acordo com Koshy (2018), a quantidade de reflexões de duas placas de vidro que são colocadas justapostas e lançado um feixe de luz sobre elas segue a Sequência de Fibonacci, 2, 3, 5, 8, 13 e assim por diante. No corpo humano pode ser encontradas algumas proporções que estão em razão áurea, que pode ser visto no trabalho de Leonardo da Vinci "O homem vitruviano", conforme Silva (2015).

Essas aplicações podem ser mencionadas em uma aula de biologia, física, história, arte e não somente na disciplina de matemática, podendo assim chamar mais a atenção do aluno, usando a interdisciplinaridade. Existem muitas maneiras de



aplicar a Sequência de Fibonacci dentro da sala de aula, o professor precisa de apenas ter uma nova perspectiva.

Aplicações da Sequência de Fibonacci no ensino da matemática

Nos dias atuais que se tem uma facilidade de se encontrar informações para tudo pela internet, que nem sempre são corretas, o professor teve que se reinventar e utilizar de tecnologias em sala de aula, para que os alunos deem a atenção necessária para o conteúdo. Apenas quadro e giz não são suficientes para ensinar. "A aula que apenas repassa conhecimento, ou a escola que somente se define como socializadora de conhecimento, não sai do ponto de partida, e, na prática, atrapalha o aluno, porque o deixa como objeto de ensino e instrução. Vira treinamento." (DEMO, 2005, p. 7).

De acordo com Dewey (1979, p. 4), o ensino surge por meio da passagem de conhecimento dos mais velhos para os mais novos, a partir das experiências de vida, é "[...] a necessidade de ensinar a aprender para a continuação a existência social, [...]."

O ensino da matemática, precisa de atenção e dedicação, desde a formação dos professores. Inicialmente os professores formadores de professores deveriam ser educadores e pesquisadores. Pois não tem como ensinar, com êxito, algo que não se pratica. Então, os professores recém-formados precisam sair da Universidade com o pensamento de que professor também estuda. E que é por meio da pesquisa que se consegue um bom desempenho no ensino-aprendizagem dos alunos.

A Sequência de Fibonacci é um conteúdo que pode ser citado na aula de matemática no ensino de vários conteúdos como progressão geométrica, polinômios, geometria dentre outros. Essa sequência numérica chama a atenção dos alunos, por



ter aplicações que podem ser encontradas onde eles conseguem perceber no seu cotidiano. E o professor por meio da pesquisa, consegue mostrar para isso, que conteúdos matemáticos podem estar interligados, tornando assim as aulas mais interessantes.

O Teorema de Pitágoras é uma propriedade do triângulo retângulo que diz que o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos. Segundo Silva (2015), a possível relação entre o teorema e a Sequência de Fibonacci, é por causa da propriedade, "A soma dos quadrados de dois números consecutivos da Sequência de Fibonacci é um número Fibonacci." (p. 45). Por exemplo, se os catetos tiverem valores 3 e 5, o quadrado da hipotenusa é 34. Isso desenvolve-se a seguinte propriedade: "O quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são números consecutivos da Sequência de Fibonacci é um número de Fibonacci." (p. 124).

O professor pode apresentar a Sequência de Fibonacci mostrando algumas aplicações para atizar a curiosidade dos alunos, como as aplicações na natureza. Por exemplo pode apresentar o Teorema de Pitágoras, e fazer uma relação entre eles. Podendo usar recursos tecnológicos e abusar da criatividade.

Um modelo interessante é o que Silva (2015) traz, é uma relação da conversão de milhas (1 milha = 1,609 km) em quilômetros com o número de ouro (1,618), por serem números próximos. Para fazer essa conversão tem que conhecer os números da Sequência de Fibonacci, pois precisa saber qual número da sequência está mais próximo do algarismo que será convertido. Por exemplo, 5 milhas equivalem à aproximadamente 8 quilômetros. Se o número para ser convertido não pertencer a Sequência de Fibonacci, é necessário decompor em números Fibonacci, por exemplo:



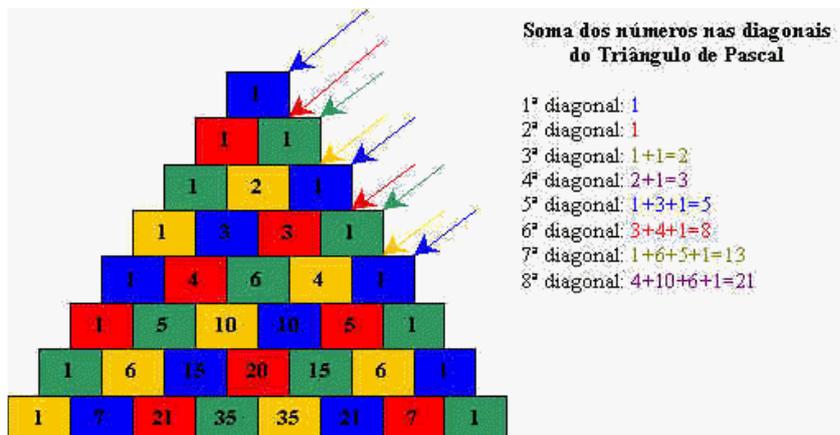
30 milhas em quilômetros, $30 = 1+8+21=49$, logo 30 milhas equivalem a 49 quilômetros.

Ainda de acordo com Silva (2015), há outras possibilidades de atividades, como a obtenção do número de ouro e sua representação geométrica, que conduz a uma demonstração usando a equação de segundo grau. Podendo usar software para a representação geométrica, como o Geogebra, para prender a atenção dos alunos pode cada um ter o software no telefone celular para terem melhor experiência. O uso das Tecnologia de Informação e Comunicação (TIC's) são de grande ajuda para o desenvolvimento das aulas, para poder sair da rotina da aula formal.

Segundo Queiroz (2007), outro tema a ser abordado em uma aula de matemática que pode ser relacionado com a Sequência de Fibonacci é o triângulo de Pascal. Um triângulo que é usado para o estudo de números binomiais, que de acordo com Silva (2015, p. 47) “[...] é um triângulo numérico infinito formado por números binomiais”, e a soma de suas diagonais tem como resultado números Fibonacci.



Figura 3 – Triângulo de Pascal



Fonte: Silva, 2015, p. 47

Conforme Mendes (2007, p. 173), um dos objetivos do professor é estimular o ensino-aprendizagem do aluno, ativando o “gene da matemática”, porque a sociedade já tem um conceito de negatividade da disciplina, o que faz com que o aluno enxergue como algo indesejável.

Demo (2005), acredita que esse ensino não pode se feito de qualquer maneira, o professor tem que pesquisar sobre o assunto e não apenas fazer um planejamento copiado. Pois é dever do professor ter material didático próprio para garantir o rendimento do aluno. Ainda segundo o autor, o aluno tem que ser visto como um ser ativo, ter no professor uma orientação motivadora, ser parceiros de trabalho, “[...] ativo, participativo, reconstrutivo, para que possa fazer e fazer-se oportunidade.” (DEMO, 2005, p. 15).

Segundo Belini (2015), o professor deve atuar como mediador, auxiliando os alunos nas resoluções de atividades. O autor propõe algumas atividades a serem feitas em qualquer série do Ensino Médio, porém antes deve, primeiramente, ser

mostrada a progressão geométrica. A Sequência de Fibonacci pode ser relacionadas com vários conteúdos como equação do segundo grau, teorema de Pitágoras, razão, construção de sequência numérica, dentre outros conteúdos que podem ser vistos no Ensino Médio. Belini (2015) acrescenta que é um tema que despertará o interesse dos alunos, quebrando tabu de que a matemática é só fórmulas e regras.

Sou tão melhor professor, então, quanto mais eficazmente consiga provocar o educando no sentido de que prepare ou refine sua curiosidade, que deve trabalhar com minha ajuda, com vistas a que produza sua inteligência do objeto ou do conteúdo de que falo. [...] Meu papel fundamental, ao falar com clareza sobre o objeto, é incitar o aluno a fim de que ele, com os materiais que ofereço, produza a compreensão do objeto em lugar de recebê-la, na íntegra, de mim. (FREIRE, 1996, p. 133-134).

A Sequência de Fibonacci pode servir como apoio para o professor de matemática em variados conteúdos, para instigar a curiosidade e buscar uma nova perspectiva de aula para os alunos, fazendo com que a aula seja interessante. Não transferindo o conteúdo verticalmente, pois o aluno é um ser ativo e pensante, podendo ele mesmo contribuir com sua aprendizagem. Aulas que acontecem com metodologias diferenciada do quadro e giz, onde o aluno participa de forma ativa, sua curiosidade é despertada trazendo uma melhor qualidade no ensino, o aluno aprende sem a pressão de ter a obrigação de aprender.

Biembengut (1996), traz uma atividade de geometria usando o retângulo de ouro, para a formação de dois sólidos: o icosaedro e dodecaedro

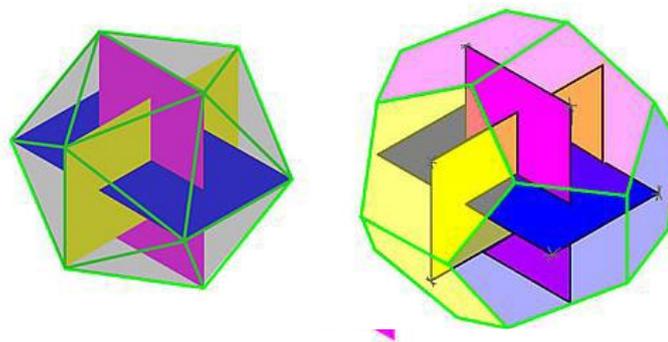
Atividade proposta (BIEMBENGUT, 1996, p. 39)



Tomando três retângulos áureos feitos com cartolina. Intercepte-os um com o outro, simetricamente tal que cada um seja perpendicular aos outros dois. Observe que:

- a) **a)** Os doze vértices são os vértices de icosaedro (20 lados) regular.
- b) **b)** Os doze vértices são o centro das faces de um dodecaedro regular.

Figura 4 – Icosaedro e Dodecaedro



Fonte: Da-Rin, 2007.

O aluno participa ativamente dessa atividade desde a construção dos segmentos áureos e a construção dos retângulos, onde pode ser lembrado alguns conceitos usados na geometria, como o ponto médio de um segmento, polígonos e retas perpendiculares, dentre outros. Depois de construídos os retângulos é disposto da maneira que formam os polígonos dodecaedro e icosaedro. O aluno fará parte da construção desses polígonos, enquanto o professor pode ir auxiliando e discutindo as propriedades matemática por detrás desse tipo de retângulo. A participação do aluno desde o início da construção até o final, traz o sentimento de satisfação tanto ao aluno quanto ao professor. Ao aluno a satisfação de participar ativamente de uma atividade e ao professor de dever cumprido, de ter ajudado na aprendizagem dos alunos. Além de o aluno aprender o conteúdo sem perceber, sem pensar que seria apenas uma obrigação para poder ter a nota no final do bimestre.

Essa atividade pode ser interessante para os alunos, pois traz metodologias diferentes de uma aula comum. Fazer essa atividade desde a explicação da Sequência de Fibonacci, a formação do retângulo de ouro e depois a construção do mesmo até chegar na construção dos sólidos, vai fazer com que o aluno participe ativamente desde o início.

Considerações finais

A Sequência de Fibonacci é uma sequência numérica que pode ser ensinada dentro de uma sala, e envolver o aluno na aula por ter aplicações relevantes que podem ser percebidas no cotidiano. Além disso, essa sequência pode tirar o aluno da zona de conforto, e passar a ser um ser ativo. Tirar um aluno da zona de conforto é fazê-lo pensar, participar da construção do seu conhecimento, interagir e questionar; um aluno ativo absorve com mais facilidade o conteúdo aprendendo e não apenas decorando fórmulas e axiomas.

A Sequência de Fibonacci pode chegar além, misturar as disciplinas fazendo que uma aula de biologia e matemática sejam mais interessantes, por exemplo. A interdisciplinaridade pode ajudar acabar com o preconceito de que matemática é apenas números e equações. Há muitas possibilidades que se pode fazer no ensino de alguns conteúdos, onde uma sequência numérica pode ajudar a incentivar o aprendizado.

Aidan Dwyer um menino de 13 anos andando pelas montanhas de Catskills nos Estados Unidos, observando os galhos das árvores principalmente aquelas que tinham como padrão a Sequência de Fibonacci, pensou no como elas captavam a luz solar, de maneira eficiente, já que conseguiam fazer o processo de fotossíntese, criou um projeto de captação da luz no padrão Fibonacci.



O que impressiona, além da inteligência de um menino de treze anos, é o como pode observar levando seu pensamento para a área das ciências. No Brasil, no ensino regular não se escuta falar em Sequência de Fibonacci, então como os alunos podem pensar em criar algo ou imaginar o que podem fazer sem ao menos escutar se falar no assunto.

A Sequência de Fibonacci serviria como um apoio para os professores em vários conteúdos, e não somente isso, a sequência por si é um conteúdo matemático interessante. Suas aplicações chamam atenção podendo ser um facilitador da aprendizagem.



Referências

BELINI, Marcelo Manechine. **A razão áurea e a sequência de Fibonacci**. 2015. 67f. Dissertação (Mestrado) – Universidade São Paulo, Programa de Mestrado Profissional em Matemática, São Carlos

BIEMBENGUT, Maria Sallet. **Número de ouro e secção áurea**: considerações e sugestões para a sala de aula. Blumenau - SC: Editora da FURB, 1996.

CELUQUE, Leonardo. **A Série de Fibonacci**: um estudo das relações entre ciências da complexidade e as artes. 2004. 112f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Programa de Pós Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, Salvador.

DA-RIN, Benito Piropo. **Um número muito especial VII**: Espiral de Fibonacci e Poliedros. 2007. Disponível em: <https://www.bpiropo.com.br/fpc20070219.htm>. Acesso em: 04 fev. 2021.

DEMO, Pedro. **Educar pela pesquisa**. 7 ed. Campinas: Autores associados, 2005.

DEWEY, John. **Democracia e educação**: Introdução à filosofia da educação. 4 ed. São Paulo: Companhia editora nacional, 1979.

EVES, Howard. **Introdução a história da matemática**. Campinas: Unicamp, 2004.

FISHER, Robert. **Fibonacci applications and strategies for traders**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1993.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia**: Saberes necessários à prática educativa. 18 ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996. (Coleção leitura).

HUNTLEY, H, E. **A Divina proporção**: Um ensaio sobre a beleza na matemática. Tradução de Luís Carlos Ascêncio Nunes. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985. 178 p. (Coleção Pensamento científico).



JÚNIOR, Deusdete Gomes de Almeida. **Um estudo de sequências numéricas e suas aplicações no Ensino das progressões**. 2017. 74f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Sergipe, Pró-Reitoria de Pós-graduação e Pesquisa, Programa de pós-graduação em matemática, Mestrado Profissional em Matemática. São Cristóvão – SE.

KOSHY, Thomas. **Fibonacci and Lucas numbers with applications**. Second edition. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2018.

MENDES, Fernanda Manuela Pinheiro. **A matemática na Natureza**. 2007. 218 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real.

MOURA, Manoel Oriosvaldo; PONOSSIAN, Maria Lucia. **Entre o movimento lógico-histórico e o ensino da álgebra: o caso particular das sequências**. In: Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. 3, 2012, Fortaleza. SIPEMAT. Fortaleza:2012. 12f.

PECK, Akkana *apud* Mc. Científica. **O nautilus**. 23 maio 2012. Disponível em: <https://blog.mcientifica.com.br/o-nautilus/>. Acesso em: 8 set. 2020.

QUEIROZ, Rosania Maria. **Razão áurea**. 39f. Tese (Livre docência) – Universidade Estadual de Londrina, Programa de Desenvolvimento Educacional, Londrina. 2007.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SILVA, Reginaldo Leoncio. **A Sequência de Fibonacci e o número e ouro**: Contexto histórico, propriedades, aplicações e propostas se atividades didáticas para alunos do primeiro ano do ensino médio. 129f. 2015. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Programa de Mestrado em Matemática, Vitória da Conquista, Ba.

VOROBIOV, N. N. **Números de Fibonacci**. Tradução do russo para o espanhol de Carlos Veja. Moscou: Mir, 1974.



ZAHN, Maurício. **Sequência de Fibonacci e o número de ouro**. Bagé, RS: Ciência Moderna, 2011.

Recebido em: 09/10/2020.

Aprovado em: 04/05/2021.



CLUBE DE MATEMÁTICA: A organização do ensino do conceito de números a partir de uma história virtual

MATHEMATICS CLUB: The organization of teaching the concept of numbers from a virtual history

Lukas Adriel Francisco Alves³¹

Maria Marta da Silva³²

Paloma Aparecida do Nascimento³³

Wallace Yamamoto Garcia³⁴

RESUMO

O artigo resulta de uma investigação com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental (EF), que participaram de uma situação desencadeadora de aprendizagem (SDA) no formato de uma história virtual elaborada e desenvolvida para o ensino do conceito matemático de números. Tais sujeitos estudam em uma das escolas-parceiras do projeto Clube de Matemática da Universidade Estadual de Goiás- Campus Sudoeste – Sede Quirinópolis. O objetivo principal é investigar como uma história virtual (HV) apresentada no formato de uma HQ denominada, 'Os Agnuns', contribuiu para que alunos compreendessem o conceito matemático de números. Para o alcance desse objetivo, planejamos e desenvolvemos um experimento didático. A estrutura da análise de dados se compôs de episódio, cenas e flashes. Os resultados possibilitaram aos sujeitos da pesquisa estabelecerem e desenvolverem, num movimento de apropriação conceitual, a organização do ensino da matemática pautada em

³¹ Licenciando em Matemática pela Universidade Estadual de Goiás Câmpus Sudoeste – Sede: Quirinópolis. Membro do Clube de Matemática. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8770-9156>. E-mail: lukasadriel1@gmail.com.

³² Pós-doutoranda pela Universidade de São Paulo. Doutora em Educação em Ciências e Matemática pela Universidade Federal de Goiás. Professora da Universidade Estadual de Goiás Câmpus Sudoeste – Sede: Quirinópolis. Coordenadora do Clube de Matemática. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3717-1439>. E-mail: profmariamarta@hotmail.com.

³³ Mestranda no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal de Goiás. Membro do Clube de Matemática. E-mail: profpaloma24@gmail.com.

³⁴ Licenciado em Matemática pela Universidade de Uberaba. Membro do Clube de Matemática. E-mail: w.yamamoto@hotmail.com.



desvelar a gênese dos conceitos e não simplesmente ensiná-los tomando apenas suas características observáveis.

Palavras-Chaves: Organização do Ensino; Números; Historicidade dos conceitos; Situação desencadeadora de aprendizagem.

ABSTRACT

The article is the result of an investigation with 5th grade students who participated in a triggering situation for learning in the format of a virtual story designed and developed to teach the mathematical concept of numbers. These subjects study at one of the partner schools of the Mathematics Club project at the State University of Goiás-Campus Sudoeste – Sede Quirinópolis. The main objective is to investigate how a virtual narrative presented in the format of a story in HQ called 'Os Agnuns' contributed for elementary school I students to understand the mathematical concept of numbers. To achieve this goal, a didactic experiment was planned and developed. The data analysis structure consisted of episodes, scenes and flashes. The results enabled the research subjects to establish and develop, in a movement of conceptual appropriation, the organization of mathematics teaching based on unveiling the genesis of concepts and not just teaching them taking only their observable characteristics.

Keywords: Organization of Teaching; Numbers; Historicity of concepts; Learning triggering situation.

Introdução

As discussões acerca do uso das histórias virtuais, em salas de aula de matemática, demonstram que o planejamento e desenvolvimento de tais propostas teórico-metodológicas podem contribuir para o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos, permitindo aos alunos não somente se atentarem aos elementos ilustrativos dessas histórias, mas, também, que deem as devidas atenções à interpretação textual e personagens. Mas o que seriam as histórias virtuais (HV)? Nessa conjuntura, a HV é uma das opções de objetivação de uma proposta de



organização do ensino que valoriza a gênese dos conceitos, sendo compreendida como:

[...] uma narrativa que proporciona ao aluno envolver-se na solução de um problema como se fosse parte de um coletivo que busca solucioná-lo, tendo como fim a satisfação de uma determinada necessidade à semelhança do que pode ter acontecido em certo momento histórico da humanidade (MOURA *et al.*, 2010, p. 224).

Diante desse cenário, a HV deve proporcionar aos alunos perpassarem por parte da necessidade real que levou o homem a criar o conceito matemático posto em discussão, ou seja, não é necessariamente a própria história do conceito, mas carrega consigo a sua essência (MOURA *et al.*, 2019), o que se configura em uma proposta para um ensino que ultrapassa os aspectos advindos da lógica formal e possui potencialidade no que diz respeito à abordagem dos conceitos matemáticos em seu movimento de constituição e não como produtos estáticos dissociados das concepções sócio históricas e culturais que permeiam a sua gênese.

Posto isso, e diante da necessidade de (re)organizar a forma com que se compreende e se ensina os conceitos matemáticos, temos espaços como o do Clube³⁵ de Matemática da Universidade Estadual de Goiás - Campus Sudoeste - Sede Quirinópolis (CluMat - UEG). Este, assim como os demais clubes, baseiam-se nos princípios da Teoria Histórico-Cultural e da Teoria da Atividade. O CluMat possui o objetivo de contribuir para a formação inicial e/ou continuada de professores que

³⁵ O CluMat originou-se em 1999 como um projeto de estágio envolvendo acadêmicos dos cursos de Licenciatura em Matemática, Pedagogia e do Programa de Pós-Graduação em Educação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (FEUSP-SP), respectivamente orientados por docentes da instituição e do Colégio de Aplicação; posteriormente, o projeto se difundiu pelas Instituições de Ensino Superior (IES) brasileiras. As ramificações se iniciaram no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás (IME/UFG) e no Centro de Educação da Universidade Federal de Santa Maria (CE/UFSM), ambos em 2009.



ensinam Matemática, proporcionando condições de aprendizagem dos conceitos matemáticos utilizados na EB, bem como organizar e produzir atividades de ensino por meio de um olhar que privilegia a gênese desses conceitos, logo está fundamentado nos pressupostos teóricos-metodológicos da Atividade Orientadora de Ensino³⁶ (AOE), proposta por Moura *et al.* (2010).

Conexo a essas discussões emergiu-se a seguinte pergunta: *quais as ações dos sujeitos nos dão indícios de compreensão do conceito matemático de números por meio de uma história virtual no formato de história em quadrinhos?* Alinhados com tal questionamento, o presente trabalho possui o objetivo de investigar como uma história virtual no formato de uma história em quadrinhos intitulada 'Os Agnuns' contribuiu para que alunos dos anos iniciais do EF compreendessem o conceito matemático de números. Para a apreensão de tal processo na sequência serão apresentados os princípios teóricos que sustentam a atividade em foco, em seguida a metodologia utilizada – experimento didático – que abriga os momentos de planejamento e desenvolvimento da HV. Logo após, a análise de dados composta de episódios, cenas e flashes e, por fim, algumas considerações dos autores.

Os princípios teóricos que sustentam a proposta da história virtual voltada ao ensino do conceito de números

O conceito de Atividade compreendido como unidade de análise do desenvolvimento humano atrelado aos pressupostos teórico-metodológicos da

³⁶ A AOE não é apenas como uma proposta teórico-metodológica para o ensino dos conceitos matemáticos, mas para além como princípio do fenômeno educativo e meio para a investigação de diversos aspectos particulares da atividade pedagógica (MOURA *et al.*, 2017).



Teoria Histórico-cultural em que o homem se constitui como sujeito histórico, a partir da sua interação com o coletivo ao longo de sua apropriação social e cultural, pode direcionar o caminho do professor na organização do ensino. Nesse sentido, a AOE propicia outra organização do ensino dos conceitos matemáticos que partem dos elementos da atividade humana para gerar necessidade e motivo, possibilitando aos sujeitos perpassarem pela condição humana e social que levaram à criação do que chamamos hoje de conceitos matemáticos, estando os mesmos interligados aos objetivos sociais que levaram ao surgimento dos mesmos, sendo estes atrelados à história e cultura social humana, hoje cristalizada e objetivada no currículo escolar.

De acordo com Moura *et al.* (2010), a AOE caracteriza tanto a atividade de ensino quanto de aprendizagem como elementos que constituem a estrutura dessa organização e seus componentes - necessidades, motivos, objetivos, ações e operações se sintetizam inicialmente na Situação Desencadeadora de Aprendizagem (SDA). Essa é a organização do ensino que propõe ações em que se coloca o sujeito em movimento, buscando a solução de situações desencadeadoras, moldadas a partir de indícios históricos da criação dos conceitos e seus objetivos sociais, destacando que essas ações devem concretizar os objetivos sociais do conceito, considerando-se as condições objetivas para o desenvolvimento das atividades, ponderando os recursos metodológicos, elegendo instrumentos e avaliando os processos da práxis pedagógica, além de contemplar o contexto sócio-cultural que cerceia os sujeitos.

Moura *et al.* (2010) destaca que existem três opções de materialização das suas SDAs e, dentre estas, temos as Histórias Virtuais (HV) que podem ser objetivadas de várias formas. Entre as alternativas o CluMat - UEG preferiu planejar e desenvolver uma HV no formato de uma História em Quadrinho (HQ), intitulada Os Agnus. A

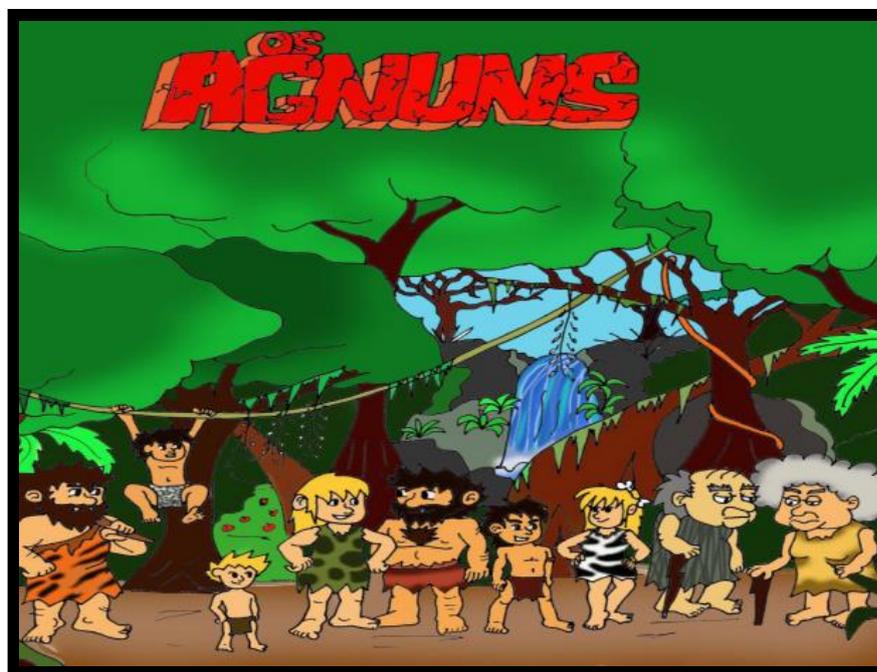


referida HV contempla o conceito de números mediante um roteiro que direciona, intencionalmente, os alunos a vivenciarem as “dificuldades do dia a dia de uma numerosa família da era pré-histórica que se viu diante da problemática de controlar seu rebanho inicial de animais” (SILVA; CEDRO, 2021, p. 95). Devido à ausência de um objeto conceitual para realizar suas necessidades e mediante tais situações a família acabou por desenvolver a concepção do conceito posto em discussão (SILVA; CEDRO, 2021).

Os personagens, cenários e os demais elementos que compõem a HQ é um reflexo do período pré-histórico e das características da humanidade daquela época. Concomitante aos elementos sócio-históricos que fundamentam a HQ, foram acrescentados elementos estéticos (Figura 1), pois “[...] com páginas coloridas e, com personagens exprimindo ações, gestos e emoções, signos variados, dentre outros, também proporcionam vivacidade à leitura” (SILVA; CEDRO, 2021, p. 91 *apud* VERGUEIRO, 2010). Nessa conjuntura aliou-se a linguagem verbal e não-verbal à fim de oportunizar aos leitores significados à leitura (SILVA; CEDRO, 2021).



Figura 1 – Capa da HQ



Fonte: Acervo pessoal do CluMat – UEG (2019)

Nos encontros do CluMat foi sugerida a criação de uma SDA que contemplasse a essência do conceito de números e, para que isso pudesse acontecer, era necessário que se fizesse uma síntese histórica³⁷ (SH), pois era do entendimento de todos os clubistas que os conceitos matemáticos não são estruturas prontas e acabadas, mas, juntamente, a partir dessa premissa teórica que se inicia o processo de elaboração da SDA. O processo de criação da SDA sempre esteve alicerçado teórico-metodologicamente pela AOE, logo atentou-se para a elaboração dos

³⁷ Dentre os objetivos da SDA está o de contemplar a essência do conceito e, para tanto, compreender o momento de surgimento e o processo de desenvolvimento de um dado conceito se torna necessário. Nessa conjuntura, Kopnin (1978, p. 184) afirma que “para revelar a essência do objeto é necessário reproduzir o processo histórico real de seu desenvolvimento, mas este é possível somente se conhecemos a essência do objeto”, por meio deste pensamento organizamos a síntese histórica do conceito que permite identificar elementos essenciais para a constituição da SDA.

problemas desencadeadores de aprendizagem, momento específico onde intencionalmente é criada uma necessidade que faz com que os sujeitos tenham por objetivo perpassar pelos indícios da necessidade da criação dos conceitos. Nessa HQ, o roteiro foi conduzido de modo que os alunos se vissem no lugar dos 'Agnuns' e dotados das mesmas necessidades deles, logo, precisavam de respostas às problemáticas postas aos personagens. Nessa SDA, foram três os nexos internos³⁸ contemplados nos problemas desencadeadores: contagem, medida, e unidade de medida, os quais figuram na HQ consoante exposto na Figura 2, destacando o surgimento de indícios da compreensão do nexo contagem por um dos personagens da HQ, vez que "apreender um material, de forma que supere o aspecto formal, não basta somente passar pelo ensino, e sim deve ser vivido, deve tornar-se parte da vida real do educando, deve ter para ele um sentido vital" (LEONTIEV, 1983, p. 247).

A HQ foi um dos instrumentos elaborados nessa ação, sendo os demais um mapa no formato de uma lona de 5 x 2,5 metros, simulacros de brinquedo para representar os animais que deveriam ser arrebanhados e pedras e galhos de madeira que seriam utilizados durante o desenvolvimento da Atividade de ensino (Figura 3). Esses instrumentos foram disponibilizados no ambiente virtual criado para o desenvolvimento da SDA com os alunos do EF.

³⁸ Os nexos internos são parte dos elos que fundamentam o conceito, o que Fonte: Acervo pessoal do CluMat – UEG (2019) contém "os aspectos históricos, filosóficos e culturais" (JESUS; SOUSA, 2011, p. 116), diferenciado dos externos que se limitam apenas à linguagem (JESUS; SOUSA, 2011).



Figura 2 - Quadrinho da HQ conexo ao nexo interno de contagem



Fonte: Acervo pessoal do CluMat – UEG (2019).

Figura 3 – Ambiente virtual construído para representar e realizar os problemas desencadeadores



Fonte: Acervo pessoal do CluMat – UEG (2019)

As escolhas que implicaram a constituição da HQ como meio de dar vida à SDA oriunda da síntese histórica do conceito de números, ocorreram por estarmos “confiantes de que tal SDA na forma de HQ como recurso didático, está em consonância com a teoria aqui proposta” (FERREIRA, 2019, p. 77), bem como nos princípios da AOE. Tais concepções, firmam-se durante a aplicação da atividade de ensino, pois esta foi imprescindível para o direcionamento das ações dos clubistas na sala de aula. As ações visam propiciar aos alunos motivos e necessidades reais que os colocam frente à situação-problema proposta. Assim, mediante tais condições optou-se por organizar intencionalmente um caminho metodológico que proporcionasse as

ações e operações, vistas como condições de direcionamento intencional dos alunos à apropriação dos nexos internos do conceito de números.

Metodologia: o caminho da pesquisa

Tendo em vista a forma como a aprendizagem dos conceitos matemáticos é realizada, atualmente, na maioria das salas de aula de matemática, o CluMat - UEG, em meio às suas ações procura a superação desse processo, o qual por muito tempo esteve(está) pautado nos princípios da lógica formal, fator este que o configura na abordagem dicotômica entre professor e aluno, teoria e prática, ensino e aprendizagem. Sendo assim, planeja ações voltadas ao desenvolvimento da atividade pedagógica do professor de Matemática como proposta de mediação dos conceitos ensinados na educação básica. O conceito de mediação é compreendido como caminho para a criação de possibilidades de “[...] (re)elaboração e (re)criação da realidade” (SILVA, 2018, p. 34) e, por sua vez, configura-se como uma ligação de interação entre atividade e consciência. É fato que as atividades se “[...] objetivam pelo processo de comunicação nas relações interpessoais, entre sujeitos com diferentes níveis da cultura, [...] e que tem como finalidade a promoção do humano no homem” (BERNARDES, 2010, p. 293).

Em detrimento a isso, durante as etapas que sucederam a pesquisa que subsidiou, esse texto, buscou-se por uma metodologia capaz de abordar o objeto de pesquisa eleito (a aprendizagem do conceito de números por alunos da educação básica) em sua totalidade, com olhares voltados aos contextos sócio-históricos e culturais, isso porque “o desenvolvimento humano é social e historicamente constituído com o auxílio de processos educativos” (SILVA, 2018, p. 32). Dessa forma,

132



optou-se por uma metodologia capaz de se adequar ao objeto de estudo e na medida em que é premissa e produto possa também se configurar como ferramenta e resultado para a investigação (VIGOTSKI, 1995). O anseio é apreender de forma detalhada “[...] as articulações dos problemas em estudo, analisar as evoluções, rastrear as conexões sobre os fenômenos que os envolvem” (SILVA, 2018, p. 36).

Assim, foi elaborado e desenvolvido um experimento didático por considerar que o mesmo abarca as objetivações frente à pesquisa desenvolvida uma vez que, segundo Moura e Cedro (2010, p. 58), o mesmo se configura em um “[...] método de investigação psicológico e pedagógico que permite estudar as particularidades das relações internas entre os diferentes processos de educação e de ensino e o caráter correspondente do desenvolvimento psíquico do sujeito”. A opção metodológica se firma na ideia que o mesmo possa ser caminho de efetivação da investigação por não isolar as variáveis envolvidas nos processos de ensino e aprendizagem, mas sim abarcar os aspectos sócio-históricos e culturais desse contexto.

O experimento didático posto em discussão emergiu do desenvolvimento das ações do CluMat - UEG, embasadas pelos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural, da Teoria da Atividade e na proposta teórico-metodológica da AOE, respectivamente propostas por Vygotsky (2007), Leontiev (1978) e Moura *et al.* (2010). O CluMat, por meio do planejamento compartilhado, aborda a organização do ensino de Matemática na educação básica valorizando os aspectos lógico-históricos desses objetos, assim como a dialética existente no movimento de constituição dos mesmos. As ações planejadas coletiva e intencionalmente objetivavam o ensino do conceito de números.

Em relação à estrutura do experimento é necessário abordar particularidades do seu desenvolvimento, tais como o contexto da pesquisa e os sujeitos de

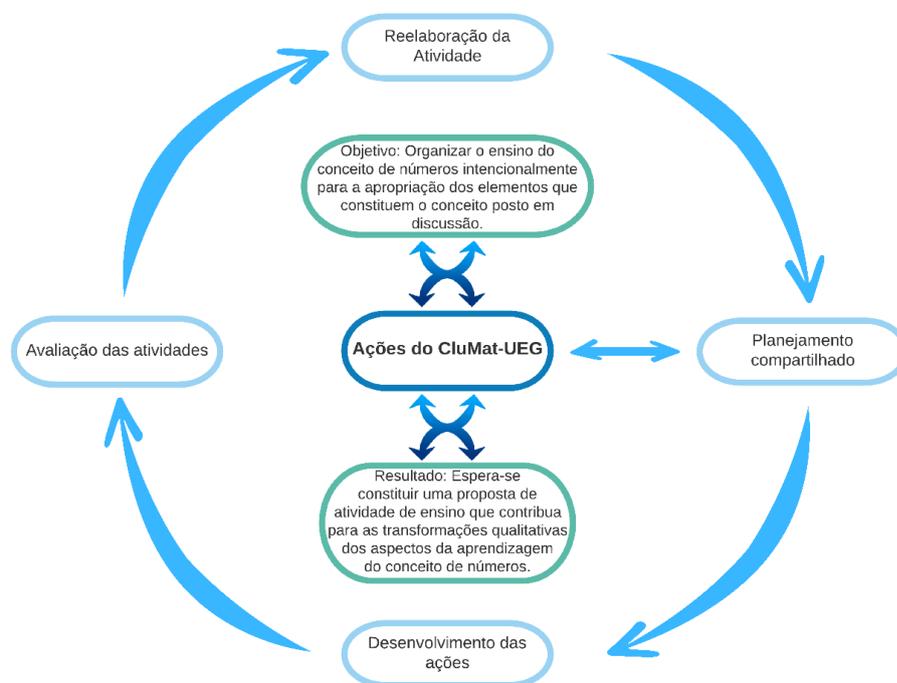


investigação. O CluMat conta com seis escolas parceiras – da rede pública estadual e municipal, que se configuram como contexto de pesquisa. Os participantes desse espaço de formação docente desenvolvem AOE's com turmas dos anos finais e finais do EF, dessa forma, os indivíduos envolvidos são professores de matemática em formação e alunos das escolas parceiras. Para esse artigo em especial os sujeitos são alunos de um 5º ano do EF – aproximadamente 30 – de uma das escolas parceiras que, num período de 4 horas-aula, participaram do desenvolvimento da SDA materializada como HV, a eles apresentada no formato de HQ; o planejamento da HQ aconteceu nos anos de 2017 a 2019 e o experimento com os alunos se deu no segundo semestre de 2019. Cabe salientar que, nesse contexto, os sujeitos são os indivíduos que efetivam a atividade, concretizando as ações que conduzem os mesmos a apreender mudanças advindas dessa realidade (LOPES, 2009).

Para que posteriormente se pudesse realizar a análise dos dados houve a coleta dos mesmos a partir de gravações audiovisuais de todas as ações junto aos alunos na escola parceira escolhida. Todas as gravações foram integralmente transcritas e organizadas; posteriormente, tanto as transcrições quanto as anotações passaram por um processo de síntese e análise. Abaixo consta o esquema representativo das ações do experimento.



Figura 4 - Movimento de constituição das ações



Fonte: Produção dos autores.

O esquema ilustrativo do experimento didático demarca as ações ancoradas no planejamento compartilhado, embora haja a valorização das singularidades de cada sujeito, uma vez que, a partir das diferentes contribuições, oriundas de diferentes contextos sociais, culturais e religiosos é que emergem as potencialidades de um espaço formativo docente marcado pela ideia do coletivo, em que “os membros se envolvam em atividades conjuntas e discussões, auxiliando uns aos outros e compartilhando informações. Para tanto, constroem relações que lhes permitem aprender uns com os outros” (CORAZZA *et al.*, 2017, p. 472). Essa coletividade deu origem ao roteiro da HV que, posteriormente, originando as cenas

desenhadas manualmente por um dos clubistas, as quais foram digitalizadas por ele, assim agrega à HV aspectos únicos de originalidade dos personagens, ora inspirados em características reais dos próprios participantes do CluMat.

Na sequência, está em tela, a estrutura da análise dos dados que tem como finalidade ir ao encontro do objetivo desse texto que é investigar como uma HV no formato de uma HQ intitulada, 'Os Agnus', contribuiu para que alunos dos anos iniciais do EF compreendessem o conceito matemático de números, ressaltando que a mesma engloba episódios, cenas e flashes.

Análise dos dados: a compreensão do processo

Na busca por coerentes formas de organização e exposição da análise dos dados o pesquisador tenta apreender o movimento de desenvolvimento do processo de apropriação dos sujeitos. Nesse sentido, as pesquisas de abordagem histórico-dialéticas se preocupam com o registro do movimento, a evolução e a dinâmica dos fenômenos (GAMBOA, 2000). Sendo assim, essa proposta analítica constitui uma das possibilidades de o pesquisador explicar a realidade ao seu redor. Com tal predisposição, a análise dos dados é vista como parte das características da totalidade. A opção foi estruturá-la em episódios, entendidos aqui como conjuntos de cenas que dão luz ao movimento de apreensão do fenômeno, enquanto que as cenas são compreendidas como partes que compõem os episódios e dão foco ao que se busca elucidar (MOURA *et al.*, 2010; SILVA, 2018). Por fim, os flashes são "percebidos como representações verbais do pensamento" (SILVA, 2018, p. 154). A escolha por tal estrutura analítica não é um movimento fácil, pois "a exposição não se



limita à simples descrição, mas contempla a explicação. Trata-se da análise explicativa em detrimento da descritiva” (SILVA; CEDRO, 2019, p. 477).

Nesse viés, definiram-se, a partir dos dados coletados na forma de gravação audiovisual do experimento didático, os momentos nos quais os sujeitos confirmam indicativos de apropriação do conceito de números. A análise dessa forma estruturada não possui, de acordo com Silva (2018), a obrigatoriedade de mostrar a realidade exatamente como ela é, mas como foi percebida e sentida pelo pesquisador. Desse movimento processual de expor e analisar o desenvolvimento e entendimento do fenômeno, nasce a seguinte composição da análise:

Quadro 2 – Estrutura da análise de dados

EPISÓDIO: A relevância do desenvolvimento da história virtual no formato de uma HQ para a compreensão do conceito de número	
Cena 1 Os indícios da compreensão da relação do surgimento do conceito de número com as necessidades humanas	Cena 2 A historicidade como elemento de reorganização do ensino: uma nova qualidade para o conceito de números

Fonte: Produção dos autores.

EPISÓDIO: A relevância do desenvolvimento da história virtual no formato de uma HQ para a compreensão do conceito de número

Nesse episódio, buscou-se o entendimento da relevância do desenvolvimento da história virtual, no formato de uma HQ, para a compreensão do conceito de número. Tal episódio busca compreender como se deram essas contribuições para que os sujeitos da pesquisa entendessem o conceito de número como conexo ao movimento da historicidade do homem. As duas cenas possuem como particularidade comum o fato de representarem ações coletivas que demonstram o

137



caminho percorrido pelos sujeitos. Na sequência, foram desvelados os indícios das transformações dos sujeitos em questão na análise de cada cena e seus flashes componentes.

CENA 1 – Os indícios da compreensão da relação do surgimento do conceito de número com as necessidades humanas

Avaliando o homem enquanto ser social, cujas funções do desenvolvimento humano surgem inicialmente no nível social e, logo após, no nível individual (VIGOTSKI, 2007) justificam-se as propostas de desenvolvimento de atividade pedagógica que permita o desenvolvimento humano e se estabeleçam por meio do processo de aprendizagem, intencionalmente projetada, com vistas ao desenvolvimento do sujeito. Processos de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos pensados a partir dessas concepções teóricas não se dão de forma objetiva na relação direta entre o sujeito e o objeto de conhecimento, mas sempre de forma mediada, por meio de um signo ou instrumento, de modo que o conceito de mediação implica a ideia de que o homem é capaz de operar mentalmente sobre o mundo (VIGOTSKI, 2007).

Nesta perspectiva, a escola é compreendida como lugar privilegiado de apropriação dos conhecimentos historicamente instituídos, onde a organização intencional do acervo cultural produzido historicamente representa a essência da atividade pedagógica, considerada atividade principal do professor, pois

[...] se, dentro da perspectiva histórico-cultural, o homem se constitui pelo trabalho, entendendo este como uma atividade humana voltada a um fim e orientada por objetivos, então o professor constitui-se professor pelo seu

138



trabalho – atividade de ensino – ou seja, o professor constitui-se professor na atividade de ensino (MORETTI, 2007, p. 101).

Como consequência, a formação docente instituída em espaços formativos como o Clube de Matemática e, ancorada na perspectiva histórico-cultural, exige transformar a atividade pedagógica do professor de matemática de forma que o impulse a organizar o ensino, a desenvolver nos alunos as máximas capacidades humanas, tendo como referência os conhecimentos matemáticos historicamente constituídos pela humanidade (AMORIM, 2015). Desta forma, tal necessidade apresenta-se como propulsora para o desenvolvimento de atividades de ensino no CluMat, que, por sua vez, relaciona-se com os motivos dos participantes e se direciona ao encontro do objetivo de ensinar os alunos da escola.

Todo o tempo essa atividade tinha entre seus objetivos que os alunos se apropriassem do conceito de número e compreendessem-no em seu movimento histórico de constituição: *Quando eu vi que a gente ia usar gibi na aula de matemática eu achei que a gente ia só ler a história mesmo, não pensei que ele ia servir para aprender matemática mesmo e eu gostei muito de saber da história dos números porque eu já até tinha perguntando pra tia pra que tinham inventado os números e como que tinham inventado (Flash 1, Cena 1). Agora a gente nunca mais vai esquecer como que os números foi [sic] inventado, agora a gente aprendeu de verdade sobre os números, eu gostei muito do gibi, da família dos Agnuns, até achei o velhinho parecido com meu avô, foi muito bom o gibi ter contado a história de verdade dos números e de um jeito engraçado, eu gostei muito (Flash 2, Cena 1).* Uma das necessidades de transformação da atividade pedagógica instituída para a elaboração da HV, que se materializou como HQ, foi mobilizar os clubistas a



desenvolverem ações condizentes com o objetivo de possibilitar aos alunos da escola-parceira a compreensão a partir da história em quadrinhos da constituição histórica do conceito de número.

A elaboração da HV somente foi possível porque o contexto formativo do CluMat-UEG privilegia a historicidade dos conceitos matemáticos como premissa relevante para a apropriação conceitual dos mesmos, primeiro pelos professores em formação, depois pelos alunos da escola-parceira, pois “um elemento essencial na formação do professor é o conhecimento da história dos conceitos, pois essa história é a história do desenvolvimento dos problemas e das soluções criadas nas relações humanas” (MOURA, 2012, p. 188). No CluMat parte-se da necessidade de colocar o conhecimento matemático a ser aprendido como uma necessidade para aquele que aprende – o clubista, professor em formação que participa do clube de matemática e os alunos das escolas-parceiras e fundamentado na importância de que o professor conheça a historicidade dos conceitos, pois assim terá condições teórico-objetivas de “lançar mão de instrumentos e de estratégias que lhe permitirão uma maior aproximação entre sujeitos e objeto de conhecimento” (MOURA, 1996, p. 4), criando situações desencadeadoras de aprendizagem como a aqui analisada. Sendo assim, será possível o reconhecimento dos conceitos matemáticos como produção humana estabelecida historicamente a partir de necessidades socioculturais, o que sugere organizar o ensino, atendendo esse movimento de produção e a necessidade que o moveu. Nos flashes a seguir temos sinais de tais entendimentos pelos alunos: *Você viu aquela parte da HQ em que eles tiveram que criar os números para poder saber que tanto de dodôs estavam voltando de quando iam beber água? (Flash 3, Cena 1); Eu gostei do mapa com os caminhos igual tinha no gibi que vocês fizeram pra gente fazer igual os homens dos Agnuns que estavam brigando pra saber qual era o melhor*



caminho porque eu nunca ia entender que número, esse número aí que a tia ensina e ensina todo dia tinha a ver com medida de caminho né, que as pessoas bem lá atrás tiveram que pensar em número para medir os caminhos e até para não se perder também (Flash 4, Cena 1).

Conforme o desenvolvimento da SDA se desenrolava os sujeitos da pesquisa eram postos frente aos problemas desencadeadores da HV e os mesmos os conduzia ao processo de surgimento e desenvolvimento do conceito de número em sua complexidade, para além da sua presença no cotidiano, para que pudessem perceber que tal conceito “teve seu início na pré-história, [quando] o ser humano utilizou diferentes estratégias para controlar, registrar e comunicar as quantidades, bem como para realizar cálculos e operações” (MOURA, 1996, p. 1). Os próximos flashes corroboram tal discussão: *Tia eu não sabia que os números eram tão antigos desse jeito, eu achei que tinham sido inventados por professores de matemática (Flash 5, Cena 1). O povo lá do gibi era bem antigo mesmo, eles pareciam uns que tem num filme que vi de desenho animado bem engraçado, eu acho que gente igual ao desse filme é igual ao do gibi que vocês fizeram pra gente já existiram de verdade e eu acho que esse povo inventou os números desse jeito da história que a gente fez e ajudou eles (Flash 6, Cena 1). Eu já vi muito menino perguntando pra tia aqui na escola para que inventaram esses números e a matemática e eu ficava pensando também pra que inventaram né, agora descobri, era porque o povo antigo, bem antigo precisava para ajudar nas coisas deles, igual o povo da história precisou contar os dodôs para saber quantos voltava e depois para medir o caminho porque o velho Agnun queria passar eles pra trás (Flash 7, Cena 1).* Os flashes também denunciam o entendimento pelos sujeitos da pesquisa da relação do conceito de número com as necessidades humanas. Pensar sobre a produção desse conceito, a partir dessa



defesa do movimento histórico de constituição conceitual, diverge totalmente da apropriação desse conceito de forma mecânica, por meio de memorização como comumente é a eles ofertado na escola: *A minha irmãzinha fica lá todo dia dançando e contando de 0 a 10, e cobrindo os pontinhos que forma os números na folha, mas só porque a tia mandou, mas ela não sabe o que é mesmo os números, ela só sabe contar porque eu acho que decorou, e só desenha eles porque cobre os pontinhos, eu podia levar um gibi desses e ensinar ela. Posso? (Flash 8, Cena 1).*

Diante do exposto têm-se condições de defesa de um ensino do conceito de número que pressupõe a participação do aluno como sujeito ativo em sua complexidade, tanto no aspecto cognitivo, quanto corporal, o que transcende a função motora exercida em uma atividade de grafia de numerais resultantes da simples contagem de um conjunto de objetos. Afinal, o conceito de número é composto de elementos que extrapolam a simples grafia numérica, tais como a correspondência um a um, a

[...] cardinalidade, ordinalidade, contagem seriada, contagem por agrupamento, composição e decomposição de quantidade, reconhecimento de símbolos, representação numérica, operacionalização numérica, percepção de semelhanças e diferenças, percepção de inclusão e percepção de invariância (LORENZATO, 2008, p. 31-2).

Embora a identificação dos números e contagem rotineira denotem a função social desse conceito e sua utilidade, cabe à escola ampliar a experiência cotidiana e organizar o acesso do mesmo como bem cultural constituídos historicamente.

A implicação da proposta de organização do ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos, defendidos no CluMat, passa por compreender que, embora os alunos adentrem a escola com algum conhecimento sobre número, isso não quer



dizer que possuam apropriação deste complexo sistema conceitual e dos nexos internos que o compõem, decorrendo daí a importância da organização intencional da atividade pedagógica na escolha de ações e operações que permitam tal apropriação.

A proposta teórico-metodológica da AOE - Atividade Orientadora de Ensino - (MOURA, 1996, 2010), defendida no CluMat, tem se tornado um caminho viável de organização do ensino de conceitos matemáticos ao permitir o desenvolvimento de SDAs que contenham a síntese histórica do conceito, além da oferta de recursos metodológicos para a efetivação do processo de apropriação do conceito e assunção da análise e síntese do processo como caminho de construção da solução coletiva da problemática apresentada aos sujeitos durante a atividade (MOURA, 1996; ARAUJO, 2003; MORETTI, 2007). Na próxima cena temos a continuidade desse processo.

CENA 2 – A historicidade como elemento de reorganização do ensino: uma nova qualidade para o conceito de números

A organização do ensino dos conceitos matemáticos na maioria das escolas é baseada no desenvolvimento de atividades pedagógicas derivadas de experiências cotidianas e brincadeiras desprendidas de qualquer objetivo pedagógico. A proposta trazida pelo Clube de Matemática caminha rumo à superação dessa realidade, ofertando um processo de ensino de conceitos matemáticos totalmente repensado e replanejado, reorganizado. A HV apresentada no formato de HQ aos alunos apresenta indícios dessa ressignificação conceitual materializada nos seguintes flashes: *A gente nunca tinha feito uma atividade desse jeito, assim que usa um gibi pra contar uma história que na verdade também conta uma história verdadeira* (**Flash**

143



1, Cena 2). *Os probleminhas que a gente faz com tia são bem diferentes desses que a gente teve que resolver para ajudar a família dos Agnuns, os probleminhas que a tia passa tem a ver com coisas tipo a venda de picolés, o tanto de docinhos de uma festa, nunca tem uma história como essa do gibi, eu achei bem diferente, eu gostei muito (Flash 2, Cena 2).*

Apesar dos alunos já estarem no 5º ano do EF - muitos deles não haviam se apropriado realmente do que era o conceito de número: *Eu achei que número só servia para contar e fazer conta eu nunca que ia achar que servia para medir distâncias, nunca tinha pensado assim (Flash 3, Cena 2).* A história foi muito boa mesmo, ela mostrou pra gente que número não serve só pra contar o tanto das coisas, serve para medir e pra gente escolher com o que quer medir as coisas, esses Agnuns eram mais inteligentes que a gente hoje eu acho **(Flash 4, Cena 2)**. Os flashes nos permitem o entendimento da tão necessária interdependência entre a apropriação dos elementos internos do conceito – contagem, medida e unidade de medida – para a apropriação do próprio conceito pelos alunos, pois compreender essa complexa inter-relação a partir das mediações estabelecidas no espaço coletivo da sala de aula, não é uma tarefa das mais fáceis. Para o alcance desse objetivo, tem-se a reorganização do processo de ensino desse conceito de forma conscientemente intencional, considerando as noções de correspondência biunívoca, agrupamento e comparação de quantidades.

Os alunos participaram de uma proposta de atividade de ensino baseada na transformação do motivo que impulsionava a organização do ensino desse conceito. Tal processo de mudança é relevante, já que, conforme destaca Leontiev (2012), é a partir da relação entre o resultado da ação e a transformação do motivo que “ocorre



uma nova objetivação de suas necessidades, o que significa que elas são compreendidas em um nível mais alto” (LEONTIEV, 2012, p. 70).

Assim, mesmo que supostamente os alunos do 5º ano do EF já teriam conhecimento acerca do conceito de número a partir do desenvolvimento da HV como HQ dão sinais de ter ganho uma nova qualidade por permitir explorar outras possibilidades de compreensão e utilização do conceito de número: *A gente já tá quase indo estudar de manhã no colégio e nem sabia direito o que eram na verdade os números, mas agora com essa tarefa bem diferente com o gibi a gente aprendeu coisas que até agora não tinha aprendido (Flash 5, Cena 2). A família dos Agnuns até parece a minha, porque minha família é bem curiosa também e eu acho que se fosse a gente lá nós também ia inventar os números para ficar mais fácil mexer com os dodôs, controlar eles e descobrir o melhor caminho para levar eles pra beber água e agora depois desse gibi vou pensar em muitas outras coisas que a gente pode usar os números, e não só pra fazer continha (Flash 6, Cena 2).* Portanto, quando o sentido das ações dos alunos se transforma pela tomada de consciência de elementos internos que sustentam tal conceito e da importância da mediação no processo de aprendizagem dá-se outra organização do ensino para o mesmo (ARAUJO, 2003; MORETTI, 2007). Desta forma, as ações dos alunos se tornaram conscientes e coerentes com o objetivo de aprenderem o conceito que lhes era ensinado.

Considerações finais

De acordo Vigotski (2009, p. 246), um conceito não pode ser aprendido por simples memorização, pois ele “é mais do que a soma de certos vínculos formados pela memória, é mais que um simples hábito mental; é um ato real e complexo de



pensamento". Assim, a apropriação de um conceito acontece por meio de pensamento complexo o que implica a aproximação do sujeito com o objeto de conhecimento de forma mediada.

Destarte, frente ao movimento de aprendizagem conceitual de alunos do 5º ano do EF acerca do conceito de número, a partir de uma proposta que o entende como resultado a uma necessidade humana que contempla elementos como correspondência um a um, noção de cardinalidade, ordinalidade, agrupamento, composição e decomposição de quantidade, medidas e padronização das medidas, reconhecimento de símbolos e representação numérica (AMORIM, MORETTI, 2017); as ações propostas pelos clubistas a esses alunos eram distintas do que comumente temos em nossa realidade escolar quando o assunto é ensino de conceitos matemáticos. Tal mudança aconteceu porque o objetivo e a necessidade da atividade de ensino estavam também transformados. Nesse processo, os motivos dos professores em formação no contexto do CluMat-UEG para a organização do ensino de número também se transformaram, pois houve uma "nova objetivação de suas necessidades, [...] compreendidas em um nível mais alto" (LEONTIEV, 2012, p. 71), isto é, a necessidade da organização do ensino passou a permitir que os alunos da escola-parceira se apropriarem do conceito em sua gênese, e não mais em sua aparência.

Com esta transformação dos motivos, a organização e a estrutura da atividade pedagógica passam a ser conscientizadas e coordenadas com os objetivos do ensino que reconhecem a aprendizagem como elemento intrínseco a ele. Como consequência do exposto, participar do Clube de Matemática possibilitou aos professores em formação e aos alunos da escola-parceira se estabelecerem e desenvolverem em atividade de ensino num movimento de apropriação conceitual,



desencadeador de outra organização do ensino da matemática que busca meios para desvelar a gênese dos conceitos e não simplesmente ensiná-los tomando apenas suas características observáveis, seus nexos externos.

Por fim, defende-se que para além de constatar a potencialidade do Clube de Matemática como propiciador de transformação da atividade pedagógica do professor de matemática a partir de uma outra organização do ensino da matemática, o movimento de aprendizagem da docência e de aprendizagem de alunos do EF explicitado fortalece a defesa do processo de mudança da atividade pedagógica, rumo a uma possível educação humanizadora.

Referências

AMORIM, G. M. **Matemática na Educação Infantil?** Contribuições da Atividade Orientadora de Ensino para a (re)organização da prática docente. 2015. 187 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação. Universidade Federal de São Paulo, Guarulhos, 2015.

AMORIM, G. M.; MORETTI, V. D. Matemática na educação infantil: contribuições da atividade orientadora de ensino para a (re)organização da prática docente. **Inter-Ação**, Goiânia, v. 42, n. 1, p. 194-213, jan./abr. 2017.

ARAÚJO, E. S. **Da formação e do formar-se:** a atividade de aprendizagem docente em uma escola pública. 2003. 173f. Tese. 2003.

BERNARDES, M. E. M. A educação como mediação na teoria histórico-cultural: compromisso ético e político no processo de emancipação humana. **Revista psicologia política**. vol. 10, nº 20, Jul./Dez, p. 293-296, 2010.

CORAZZA, M. J. *et al.* Comunidades de práticas como espaços de investigação no campo de pesquisa e formação de professores. **Pesquisa Qualitativa em Educação em Ciências:** enfoque na construção e análise dos dados, São Paulo, v. 5, n. 9, p. 466-



494, 01 dez. 2017. Disponível em: <https://editora.sepq.org.br/rpq/article/view/138>. Acesso em: 23 out. 2021.

CEDRO, W. L.; MOURA, M. O. Experimento didático: un camino metodológico para la investigación en la educación matemática. **Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n. 22, p. 53-63, Junio de 2010.

FERREIRA, C. A. **A aprendizagem da docência em matemática a partir da elaboração de uma situação desencadeadora da aprendizagem**. 2019. 159 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2019.

JESUS, W. P.; SOUSA, M. C. Reflexões sobre os nexos conceituais do número e de seu ensino na Educação Básica. **Boletim GEPEM**, n.58, p. 115–127, Jan./Jun. 2011.

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978. (Coleção Perspectivas do homem).

LOPES, A. R. L. V. **Aprendizagem da Docência em Matemática**. 1 ed. Passo Fundo. RS: Ed. Universidade de Passo Fundo, 2009.

LORENZATO, S. **Educação infantil e a percepção matemática**. Campinas: Autores Associados, 2008.

LEONTIEV, A. N. (1983). **Actividad, conciencia y personalidad**. Havana: Editorial Pueblo y Educación.

LEONTIEV, A. N. Uma contribuição à teoria de desenvolvimento da psique infantil. In: VIGOTSKII, L. S. *et al.* **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. São Paulo: Ícone, p. 59-83. (Capítulo 4), 2012.

MEIRELES, C. **Problemas da literatura infantil**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1984.

MOURA, M. O. *et al.* ATIVIDADE ORIENTADORA DE ENSINO: unidade entre ensino e aprendizagem. **Rev. Diálogo Educ.**, Curitiba, v. 10, n. 29, p. 205-229, jan./abr. 2010. Disponível em: <https://periodicos.pucpr.br/index.php/dialogoeducacional/article/view/3094>. Acesso em: 22 set. 2021.



MOURA, M. O. (Coord.). **Controle da Variação de Quantidades**: atividades de ensino. São Paulo: FEUSP. (Textos para o Ensino das Ciências, n. 7), 1996.

MOURA, M. O. Didática e prática de ensino para educar com matemática. **XVI ENDIPE** – Encontro nacional de didática e prática de ensino – UNICAMP, Campinas: Junqueira & Martins editores, livro 02, 2012.

MOURA, M. O.; ARAUJO, E. S.; SERRÃO, M. I. B. Atividade Orientadora de Ensino: fundamentos. **Linhas Críticas**, [S. l.], v. 24, 2019. DOI: 10.26512/lc.v24i0.19817. Disponível em: <https://periodicos.unb.br/index.php/linhascriticas/article/view/19817>. Acesso em: 25 set. 2021.

MORETTI, V. D. **Professores de Matemática em atividade de ensino: uma perspectiva histórico-cultural para a formação docente**. 2007. 208 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

SILVA, M. M. **A apropriação dos aspectos constituintes da atividade pedagógica por professores de matemática em formação inicial**. 2018. 307 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2018.

SILVA, M. M.; CEDRO, W. L. Aprendendo sobre os números com os Agnuns. In: PEREIRA, A. C. C.; ALCÂNTARA, C. S. DE (org.). **Histórias em quadrinhos na educação**: possibilidades de uma prática. Fortaleza, CE: Uece, 2021. Cap. 5. Disponível em: http://www.uece.br/eduece/dmdocuments/Historia_em_quadrinhos_na__educacao____EdUECE.pdf. Acesso em: 23 out. 2021.

SILVA, M. M.; CEDRO, W. L. Discutindo as Operações de Adição e Subtração com Futuros Professores dos Anos Iniciais. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, [S.L.], v. 33, n. 64, p. 470-490, ago. 2019. FapUNIFESP (SciELO). <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n64a02>.



VERGUEIRO, W. A linguagem dos quadrinhos: uma “alfabetização” necessária. In: RAMA, A. *et al.* **Como usar as histórias em quadrinhos na sala de aula**. São Paulo: Contexto, 2010. cap. 3, p. 31-64

VIGOTSKI, L. S. **Obras Escogidas**. (Tomo III) . Madrid: Visor, 1995.

VIGOTSKI, L. S. **A formação social da mente**. 7 ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007

VIGOTSKI, L. S. **Vigotski**: a construção do pensamento e da linguagem. Tradução Paulo Bezerra. 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2009.

Recebido em: 09/10/2021.

Aprovado em: 04/05/2022.

