

CÁLCULO COMPUTACIONAL DA COMBINAÇÃO DE DIAGRAMAS DE MOMENTOS FLETORES EM BARRAS ISOLADAS COM INÉRCIA VARIANDO EM MÍSULA

CÁLCULO COMPUTACIONAL DE COMBINACIÓN DE DIAGRAMAS DE MOMENTOS FLECTORES EM BARRAS AISLADAS ACARTELADAS

VINÍCIUS DE BARROS SOUZA

Graduando em Engenharia Civil pela Universidade Estadual de Goiás, Campus Anápolis de Ciências Exatas e Tecnológicas
viniciuswg@hotmail.com

EDSON TEJERINA CALDERÓN

Doutor em Engenharia Civil e Professor da Universidade Estadual de Goiás, Campus Anápolis de Ciências Exatas e Tecnológicas
edtejerin@uol.com.br

Resumo: A metodologia de resolução de pórticos pelo método das forças recai na determinação dos termos de carga e coeficientes de flexibilidade. Estes coeficientes, em uma estrutura composta por barras de momento de inércia constante, podem ser calculados por fórmulas prontas disponíveis na literatura através da combinação de diagramas de momentos fletores. No caso de estruturas com momento de inércia variável, tais fórmulas não são válidas, devendo-se recorrer ao cálculo analítico. Uma alternativa, nesse aspecto, é a utilização de tabelas de auxílio, como as divulgadas por Guldan (1956), que fornecem os coeficientes pertinentes ao método das forças para mísulas retas e parabólicas. Para uma parcela de combinações de diagramas, essas tabelas cumprem satisfatoriamente a função de substituir integrações algébricas particularmente trabalhosas. No entanto, essas tabelas apresentam limitações quanto aos parâmetros de entrada e os casos de combinações, comprometendo o resultado final ou mesmo inviabilizando sua aplicação. Diante disso, o presente trabalho propõe uma metodologia para o cálculo computacional da combinação de diagramas de momentos fletores em barras isoladas com momento de inércia variando em mísula (reta ou parabólica) baseado no Princípio dos Trabalhos Virtuais, cujas integrais resultantes desse princípio são resolvidas numericamente por quadratura gaussiana. A eficiência da metodologia proposta e o grau de convergência dos resultados são comprovados por comparação dos valores obtidos pelo programa computacional desenvolvido pelos autores e os casos equivalentes apresentados por Süsskind (1993), originalmente divulgados por Guldan (1956), com os resultados obtidos por integração algébrica realizados em *software* matemático.

Palavras-chave: Mísula. Princípio dos Trabalhos Virtuais. Método das Forças. Cálculo Computacional.

Resumen: La metodología de resolución de pórticos por el método de las fuerzas recae en la determinación de los términos de carga y coeficientes de flexibilidad. Eses coeficientes, en una estructura compuesta por barras de momento de inercia constante, pueden ser calculados por fórmulas ya conocidas disponibles en la literatura a través de la combinación de diagramas de momentos flectores. En el caso de estructuras con momento de inercia variable, tales fórmulas no son válidas, deviendo se recurrir al cálculo analítico. Una alternativa, en ese aspecto, es la utilización de tablas auxiliares, como las divulgadas por Guldan (1956), que proporcionan los coeficientes pertinentes al método de las fuerzas para barras acarteladas retas e parabólicas. Para una parte de las combinaciones de diagramas, esas tablas cumplen satisfatoriamente la función de substituir integraciones algebraicas particularmente trabajosas. Entre tanto, esas tablas presentan limitaciones en cuanto a los parámetros de entrada y los casos de combinaciones, comprometiendo el resultado final o inviabilizando su aplicación. Delante de eso, el presente trabajo propone una metodología para el cálculo computacional da combinación de diagramas de momentos flectores en barras aisladas con momento de inercia variable (recta o parabólica) basado

en el Principio de los Trabajos Virtuales, cuyas integrales resultantes de ese principio son resueltas numericamente por la quadratura gaussiana. La eficiencia de la metodologia propuesta y el grado de convergencia de los resultados son comprobados por comparación de los valores obtenidos por el programa computacional desarrollado por los autores y los casos equivalentes presentados por Süsskind (1993), originalmente divulgados por Guldán (1956), con los resultados obtenidos por integración algebraica realizados con *software* matemático.

Palabras-clave: Barras acarteladas. Principio de los Trabajos Virtuales. Método de las Fuerzas. Cálculo Computacional.

INTRODUÇÃO

A Engenharia de Estruturas trabalha com análises estruturais que buscam descrever o comportamento da estrutura real em função das diversas solicitações. Para isso, um modelo estrutural é criado, a partir de hipóteses e teorias baseadas em leis físicas, com o objetivo de representar matematicamente a estrutura que está sendo analisada (MARTHA, 2010).

De acordo com Martha (2010), os métodos de análises de estruturas têm como metodologia a superposição de casos básicos. No método das forças, os casos básicos são soluções estaticamente determinadas, isto é, isostáticas. Nesse método, o modelo estrutural isostático, chamado sistema principal, é obtido pela eliminação de vínculos superabundantes da estrutura original hiperestática. Cada caso básico isola o efeito da respectiva solicitação no sistema principal para determinação dos deslocamentos na direção dos vínculos retirados. São denominados *termos de carga* os deslocamentos provocados por solicitações externas, e *coeficiente de flexibilidade* aqueles provocados por forças ou momentos associados aos vínculos retirados.

Para barras com momento de inércia constante, os termos de carga e coeficientes de flexibilidade podem ser determinados pela combinação de diagramas de momentos fletores do sistema principal nos casos básicos com auxílio de fórmulas prontas de fácil dedução tabeladas por Kurt-Beyer, também obtidas pelo processo desenvolvido por A. N. Vereshchagin, disponível em Soriano e Lima (2006). Em se tratando de barras com momento de inércia variável, essas fórmulas não são válidas, pois não consideram a lei de variação do momento de inércia. Trata-se então de um problema matemático cuja resolução algébrica é consideravelmente trabalhosa, pois envolve a resolução de integrais com divisão de polinômios, com denominador de, no mínimo, grau três, exigindo-se a aplicação de métodos matemáticos laboriosos para cada lei de variação do momento de inércia.

Para o caso particular de inércia variando em mísula reta ou parabólica (equação de segundo grau) este problema é contornado com o auxílio de tabelas, apresentadas pela

primeira vez por Guldan (1956) e divulgadas por Süsserkind (1993), as quais fornecem os coeficientes necessários ao cálculo da combinação de diagramas de uma barra isolada. Apesar disso, essas tabelas estão em função de argumentos de entrada pré-fixados, exigindo-se, em alguns casos, interpolações lineares que podem comprometer o resultado final, além de serem limitados os casos de combinações de diagramas. Para a combinação de diagramas cuja geometria seja trapezoidal, por exemplo, faz-se necessário dividir cada trapézio em novos triângulos e realizar uma somatória composta por nove combinações entre esses triângulos, o que exige a consulta das tabelas por diversas vezes.

Em virtude dessas limitações, o presente trabalho apresenta uma metodologia para cálculo da combinação de diagramas de momentos fletores em barras retas com momento de inércia variável utilizando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais, cujas integrais são resolvidas numericamente por quadratura gaussiana. Paralelo a isso, é apresentado um programa computacional, desenvolvido no *software* de código aberto *Lazarus* e implementado a partir da metodologia proposta, para o cálculo da combinação de diagramas de momentos fletores nos sistemas real e virtual em barras retas isoladas, submetidas à flexão. O programa considera barras de seção transversal retangular, perfil I e perfil T, com mísula simétrica ou assimétrica, cuja lei de variação da altura da seção é linear ou parabólica (equação de segundo grau). Também é disponibilizada a opção de diagramas causados pelas seguintes solicitações externas: carga concentrada, carga-momento concentrada e carga linearmente distribuída em todo o vão. Para idealização do comportamento de barras à flexão considerou-se a Teoria das Vigas de Navier.

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Teoria das Vigas de Navier

A análise estrutural de estruturas reticuladas, isto é, peças estruturais que têm uma dimensão bem maior que as outras duas, está fundamentada na concepção de um modelo matemático, que adota hipóteses sobre o comportamento das barras (VILELA, et al., 2018).

O comportamento de vigas à flexão foi formalizado no início do século XIX por Navier, que estabeleceu um conjunto de relações diferenciais de equilíbrio e compatibilidade chamada Teoria de vigas de Navier. Essa teoria está fundamentada em quatro hipóteses básicas (MARTHA, 2010):

- 1) Os deslocamentos são pequenos em relação às dimensões da seção transversal;

- 2) As deformações por cisalhamento são desprezadas;
- 3) As seções transversais permanecem planas e normais ao eixo da barra quando esta se deforma (hipótese de *Bernoulli*);
- 4) O material tem comportamento elástico-linear (Lei de *Hooke*).

Essas hipóteses fundamentam o modelo estrutural que tem como premissa básica uma condição de continuidade dos campos de deslocamentos e deformações no interior das barras. Essa condição é forçada quase que automaticamente quando só se admitem deformações contínuas para as barras. Além disso, os deslocamentos e deformações devem ser compatíveis entre si (VILELA et al., 2008). Para o caso de pequenos deslocamentos, a condição de compatibilidade pode ser resumida na equação (1.0):

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI(x)} \quad (1.0)$$

A equação (1.0) é considerada uma relação diferencial de compatibilidade, mas também engloba, no nível de um elemento infinitesimal de barra, a lei constitutiva do material e o equilíbrio entre tensões normais e momento fletor, e o caso geral de momento de inércia (I) variável ao longo da barra (VILELA et al., 2008).

Princípio das Forças Virtuais

Segundo Calderón (2017), existem vários métodos para calcular deslocamentos em estruturas, que podem ser classificados em três tipos:

- a) Métodos de integração direta;
- b) Métodos utilizando analogias;
- c) Métodos utilizando a energia de deformação.

Em relação as metodologias que utilizam a energia de deformação, destaca-se o Princípio das Forças Virtuais (PFV), que é uma das formulações do Princípio dos Trabalhos Virtuais (MARTHA, 2010).

O PFV pode ser utilizado para impor condições de compatibilidade a uma configuração deformada qualquer quando um sistema de forças arbitrário, denominado virtual, satisfaz as condições de equilíbrio (MARTHA, 2010). A igualdade que estabelece essa condição de compatibilidade é dada por:

$$\bar{W}_{ext} = \bar{U} \quad (2.0)$$

sendo $\bar{W}_{ext}$ o trabalho das forças virtuais externas e $\bar{U}$ a energia de deformação virtual interna.

O trabalho das forças virtuais externas é igual ao produto da força virtual externa $\bar{P}$ pelo deslocamento (δ) provocado no ponto de aplicação dessa força, isto é:

$$\bar{W}_{ext} = \bar{P} \delta \quad (3.0)$$

A energia de deformação virtual interna é dada por (MARTHA, 2010):

$$\bar{U} = \int_L \frac{M \bar{M}}{EI} ds + \int_L \frac{N \bar{N}}{EA} ds + \int_L \chi \frac{Q \bar{Q}}{GA} ds \quad (4.0)$$

sendo:

L - comprimento da barra;

E - módulo de elasticidade longitudinal;

G - módulo de elasticidade transversal;

A - área da seção transversal;

I - momento de inércia da área da seção transversal;

χ - fator de forma da seção transversal;

M, N e Q - esforços solicitantes da carga externa real; e

$\bar{M}$, $\bar{N}$ e $\bar{Q}$ - esforços solicitantes da carga virtual $\bar{P}$.

Substituindo as equações (3.0) e (4.0) em (2.0), obtém-se:

$$\bar{P} \delta = \int_L \frac{M \bar{M}}{EI} ds + \int_L \frac{N \bar{N}}{EA} ds + \int_L \chi \frac{Q \bar{Q}}{GA} ds \quad (5.0)$$

A equação (5.0) é a expressão geral do PFV para o cálculo do deslocamento genérico de um ponto de um pórtico plano isostático, ao isolar-se (δ). Para isso, o PFV utiliza um sistema auxiliar, chamado sistema virtual, que é a mesma estrutura isostática do sistema real, mas carregada com a força virtual $\bar{P}$ aplicada no ponto em que se quer determinar o deslocamento. O valor adotado para $\bar{P}$ é irrelevante, visto que o seu valor será cancelado na expressão que determina o deslocamento, pois o diagrama de momento fletor virtual é uma função linear de $\bar{P}$ (MARTHA, 2010). Vale ressaltar ainda que, apesar de se utilizar o termo “força virtual” na literatura em geral, $\bar{P}$ pode ser um esforço qualquer e não somente uma força.

De acordo com Süsskind (1993), para estruturas que trabalham à flexão, o efeito cisalhante é muito pequeno, podendo ser desprezada a parcela $\int_L \chi \frac{Q \bar{Q}}{GA} ds$, com erro mínimo.

Também pode-se desprezar, com erro tolerável, a parcela $\int_L \frac{N \bar{N}}{EA} ds$ para peças de estruturas que não trabalhem fundamentalmente à força normal. Considerando essas simplificações, para estruturas à flexão, é suficiente aplicar a parcela da equação geral do PFV referente ao momento fletor:

$$\bar{P} \delta = \int_L \frac{M \bar{M}}{EI} ds \quad (6.0)$$

Para estruturas com módulo de elasticidade e momento de inércia constantes, pode-se multiplicar ambos os membros da equação (6.0) por EI:

$$EI \bar{P} \delta = \int_L M \bar{M} ds \quad (7.0)$$

O problema resume-se no cálculo de uma integral que combina diagramas de momentos fletores nos sistemas real e virtual. Essas combinações foram tabeladas por Kurt-Beyer e encontram-se disponíveis na literatura de análise de estruturas.

Caso o momento de inércia seja variável ao longo do comprimento da barra, considera-se o momento de inércia de comparação (I_c), sendo comumente adotado o valor de menor inércia da estrutura. Multiplicando ambos os membros da equação (6.0) por EI_c , resulta:

$$EI_c \bar{P} \delta = I_c \int_L \frac{M \bar{M}}{I} ds \quad (8.0)$$

A equação (8.0) também pode ser determinada pela combinação de diagramas de momentos fletores utilizando-se as tabelas de autoria de Guldán (1956), disponíveis em Süsskind (1993). Essas tabelas são válidas para barras com inércia variável em mísula reta ou parabólica e estão em função dos argumentos de entrada $\lambda=a/L$ e $n=I_{\min}/I_{\max}$, onde (a) é o

comprimento da mísula, (L) o comprimento da barra, ($I_{\min}$) e ($I_{\max}$) a inércia mínima e máxima da seção transversal, respectivamente.

METODOLOGIA

Convenção de sinais e notações

O sistema de coordenadas locais adotados é tal que o eixo axial da barra (x), com origem na extremidade esquerda, passe pelo centro de gravidade (CG) das seções transversais e os demais eixos sejam transversais à barra, conforme Figura 1.

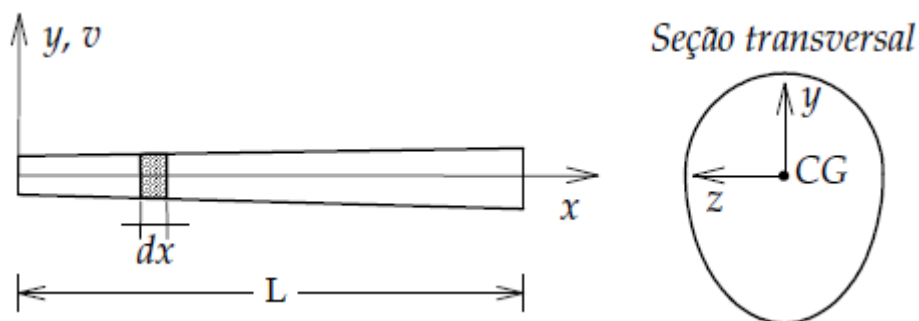


Figura 1: Sistema de eixos locais adotados (modificado - VILELA et. al., 2008).

Em relação aos esforços externos e internos, a convenção de sinais é definida de acordo com os seguintes parâmetros, ilustrados na Figura 2.

$q(x)$: taxa de carregamento linearmente distribuído ao longo do eixo da barra (positivo no sentido contrário de y);

P : carga concentrada transversalmente ao eixo da barra (positiva no sentido contrário de y);

M_o : carga-momento concentrada no eixo da barra (positiva no sentido anti-horário);

$M(x)$: momento fletor (esforço interno de flexão), positivo quando traciona as fibras inferiores da seção;

V_1 : reação transversal na extremidade inicial da barra, positiva no sentido de y .

M_1 : momento externo na extremidade inicial da barra, positivo no sentido horário.

V_2 : reação transversal na extremidade final da barra, positiva no sentido de y .

M_2 : momento externo na extremidade final da barra, positivo no sentido anti-horário.

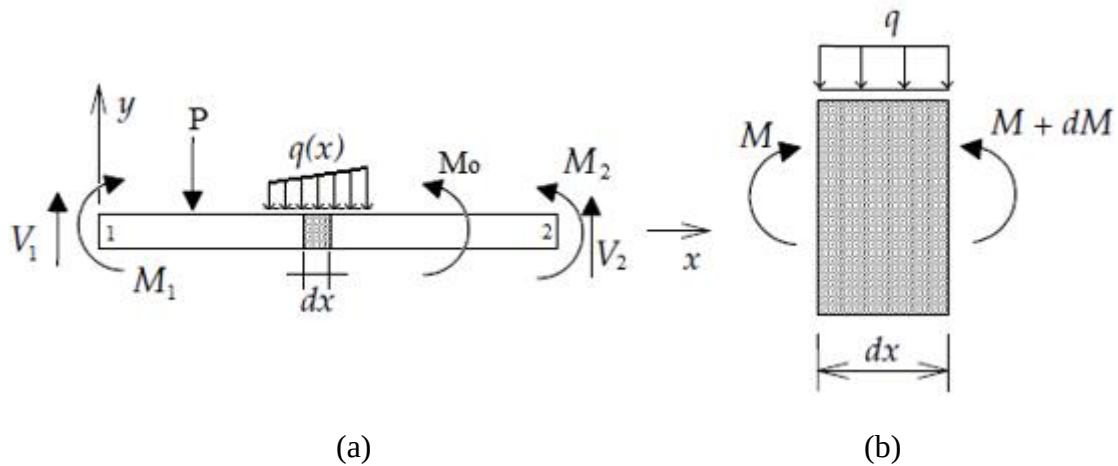


Figura 2: Sentido positivo adotado para (a) reações e cargas externas e (b) momento fletor (modificado - VILELA et. al., 2008).

As extremidades da barra serão identificadas por numerais, sendo (1) a extremidade inicial e (2) a extremidade final. Desse modo, o momento fletor nas extremidades (1) e (2) serão denominadas respectivamente (M_1) e (M_2), quando referentes ao sistema real, e ($\bar{M}_1$) e ($\bar{M}_2$) ao sistema virtual.

Cálculo da combinação de diagramas pelo Princípio das Forças Virtuais

O cálculo de deslocamentos em estruturas isostáticas é a principal solução fundamental utilizada no processo de cálculo do método das forças (MARTHA, 2010). Nesse sentido, o PFV pode ser convenientemente aplicado nesse processo, por ser uma das principais ferramentas para a determinação de deslocamentos em estruturas.

Para estruturas compostas por barras com diferente momento de inércia ou barras em mísula, é mais prático o cálculo da integral apresentada na equação (8.0) para determinação do deslocamento relativo ($EI\delta$) em um ponto qualquer da estrutura. Por se tornar usual a aplicação dessa integral nas tabelas de auxílio utilizadas no método das forças, incluindo as de

Guldan, este trabalho concentra-se em fornecer o valor de $Ic \int_L \frac{M \bar{M}}{I} ds$, que combina diagramas de momentos fletores nos sistemas real e virtual.

Para abordagem do roteiro de cálculo será utilizado um problema-modelo que exemplificará a aplicação do PFV em barras com momento de inércia variável: considere-se uma barra de comprimento (L) com momento de inércia variável no trecho (a), biengastada e carregada com uma carga (q) uniformemente distribuída em todo o vão, com a qual se deseja

determinar a combinação de diagramas de momentos fletores nos sistemas real (M) e virtual ($\bar{M}$), apresentados na Figura 3.

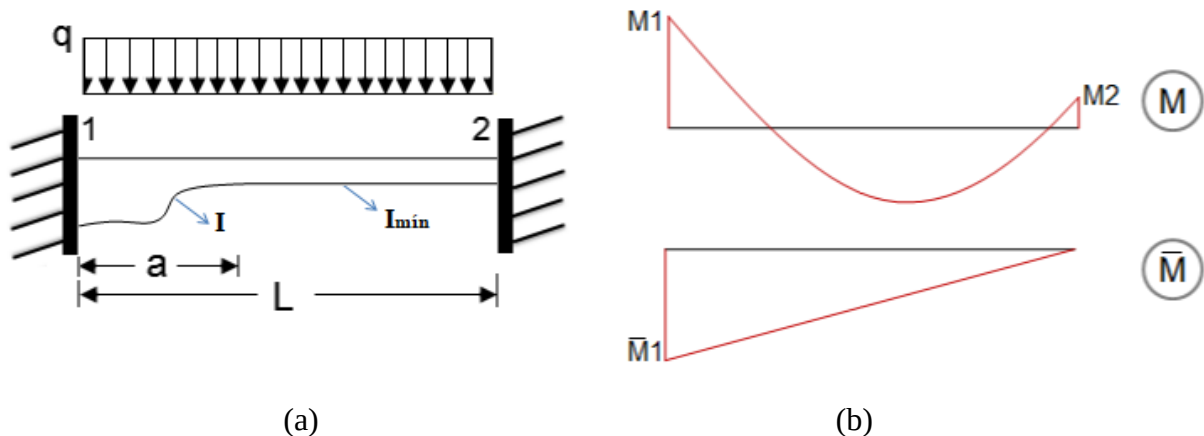


Figura 3: Modelo de (a) barra com inércia variável e (b) combinação de diagramas de momentos fletores.
Fonte: Autores, 2018.

O PFV trabalha com estruturas isostáticas, portanto faz-se necessário criar o mesmo diagrama de momento fletor do problema-modelo em barras isostáticas. Sendo assim, será adotada uma barra biapoiada com a mesma variação do momento de inércia dado pela estrutura original.

O diagrama do sistema real será então representado por uma somatória de diagramas de momentos fletores trapezoidal e parabólico causados respectivamente pela atuação de um par de cargas-momento (M_1 e M_2) nas extremidades da barra biapoiada e carregamento (q) uniformemente distribuído, conforme Figura 4.

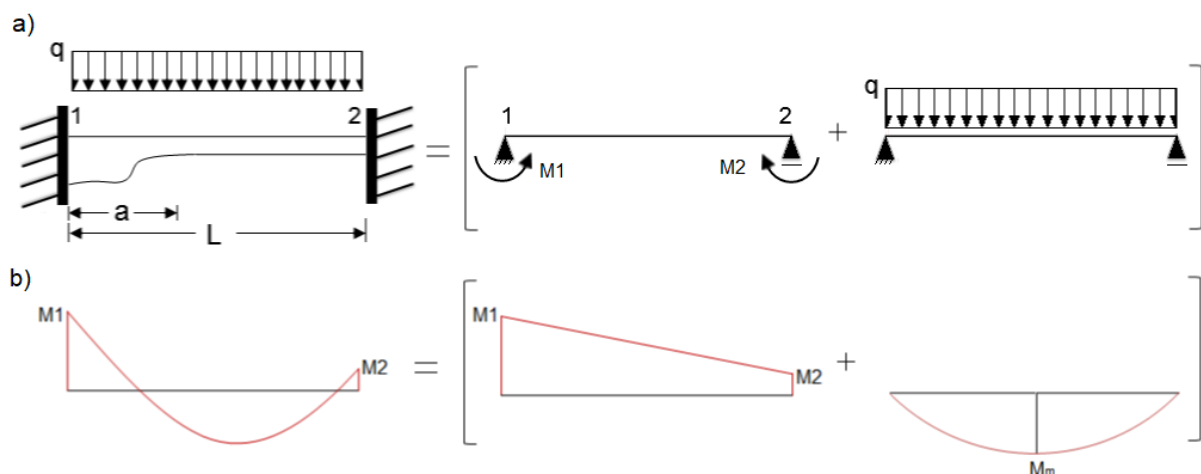


Figura 4: Composição do sistema real pela somatória de (a) barras biapoiadas carregadas externamente e (b) respectivos diagramas de momentos fletores. Fonte: Autores, 2018.

O diagrama de momento fletor do sistema virtual trata-se de um triângulo cujo momento na extremidade inicial é $\bar{M}_1$ (Figura 3b). Como a estrutura do sistema virtual tem as mesmas características da estrutura real, porém, carregada com a força virtual, será adotado a

mesma barra biapoada com uma carga-momento virtual, de intensidade $\bar{M}1$, aplicada na extremidade inicial (Figura 5).

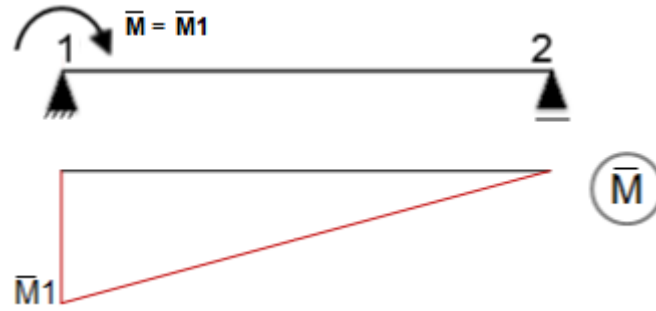


Figura 5: Sistema virtual. Fonte: Autores, 2018.

Para aplicação da equação (8.0), que considera o efeito da flexão em função do momento fletor, deve-se determinar a equação do momento fletor real e virtual da barra biapoada. Considerando o eixo das abscissas com origem no ponto (1) da barra, de acordo com a convenção adotada, tem-se as seguintes equações:

a) Momento fletor real

Diagrama trapezoidal:

$$M_1(x) = -M1 + \left(\frac{M1 - M2}{L} \right) x \quad (9.0)$$

Diagrama parabólico:

$$M_2(x) = \frac{qL}{2} x - \frac{q}{2} x^2 \quad (10.0)$$

b) Momento fletor virtual

$$\bar{M}(x) = \bar{M}1 - \frac{\bar{M}1}{L} x \quad (11.0)$$

Conhecidas as equações do momento fletor, a combinação de diagramas do problema-modelo resulta na somatória de duas combinações: trapézio e parábola reais com triângulo virtual. Adotando-se ao momento de inércia de comparação (I_c) o valor do momento de inércia mínimo da barra ($I_{\min}$), e aplicando-se a equação (8.0), a combinação inicialmente proposta é dada por:

$$EI_C \bar{P} \delta = I_C \left[\int_0^a \frac{M_1(x) \cdot \bar{M}(x)}{I} dx + \int_a^L \frac{M_1(x) \cdot \bar{M}(x)}{I_C} dx \right] +$$

$$I_C \left[\int_0^a \frac{M_2(x) \cdot \bar{M}(x)}{I} dx + \int_a^L \frac{M_2(x) \cdot \bar{M}(x)}{I_C} dx \right] \quad (12.0)$$

O roteiro apresentado pode ser generalizado para qualquer outra combinação de diagramas desde que as equações do momento de inércia e momento fletor sejam conhecidas.

Integração numérica por quadratura gaussiana

A resolução algébrica da equação (12.0) se torna trabalhosa à medida que se aumenta o grau do polinômio no denominador do integrando. Uma alternativa para se evitar o cálculo dessas integrais é a aplicação de processos numéricos com boa convergência dos resultados, tal como a quadratura de Gauss-Legendre utilizada neste trabalho.

Esse método tem como objetivo fornecer resultados exatos para polinômios até a ordem $(2n-1)$, onde n é o número de pontos em que a função $f(x)$ será avaliada. Para isso, torna flexível o critério de Newton-Cotes de que os pontos de integração sejam igualmente espaçados e gera-se um polinômio interpolador utilizando pontos diferentes dos limites de integração.

As fórmulas de Newton-Cotes podem ser reescritas genericamente, para a integral de uma função $f(x)$, na forma (SPERANDIO et al., 2003):

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} A_i f(x_i) \quad (13.0)$$

sendo os pesos A_i e os pontos x_i não arbitrados pelo usuário, mas definidos por um critério rigoroso para atender a premissa da exatidão citada acima.

Para evitar a determinação de A_i e x_i em cada novo processo de integração, esses parâmetros foram padronizados para uma solução normalizada. Desse modo, o intervalo de integração desse ser alterado de $[a, b]$ para $[-1, 1]$ através da troca de variáveis x para t , conforme equação (14.0):

$$x = \frac{(b-a)}{2}t + \frac{(b+a)}{2} \quad (14.0)$$

Consequentemente:

$$dx = \frac{(b-a)}{2}dt \quad (15.0)$$

Substituindo as expressões (14.0) e (15.0) na integral (13.0), a resolução pela quadratura de Gauss-Legendre será (GILAT e SUBRAMANIAM, 2008):

$$I = \int_{-1}^1 F(t)dt \approx \sum_{i=0}^{n-1} A_i F(t_i) \quad (16.0)$$

Deve-se fixar o número n de pontos (inteiros e positivos), no qual a solução numérica da integral será exata se $f(x)$ for um polinômio de grau até a ordem $(2n-1)$. No programa desenvolvido foram utilizados 14 pontos de Gauss, obtidos computacionalmente por uma série de instruções matemáticas programadas por Kamermans (2011). A Tabela 01 apresenta os pesos e abscissas para $n=14$ com precisão de 16 casas decimais.

Tabela 1: Abscissas e pesos de Gauss-Legendre para $n=14$.

i	abscissa (t_i)	peso (A_i)
0	0,2152638534631578	-0,1080549487073437
1	0,2152638534631578	0,1080549487073437
2	0,2051984637212956	-0,3191123689278897
3	0,2051984637212956	0,3191123689278897
4	0,1855383974779378	-0,5152486363581541
5	0,1855383974779378	0,5152486363581541
6	0,1572031671581935	-0,6872929048116855
7	0,1572031671581935	0,6872929048116855
8	0,1215185706879032	-0,8272013150697650
9	0,1215185706879032	0,8272013150697650
10	0,0801580871597602	-0,9284348836635735
11	0,0801580871597602	0,9284348836635735
12	0,0351194603317519	-0,9862838086968123
13	0,0351194603317519	0,9862838086968123

Fonte: Kamermans (2011).

Lei de variação do momento de inércia

Neste trabalho, bem como no programa desenvolvido, serão analisadas mísulas com variação da altura linear e parabólica (de 2º grau), simétricas ou não, que, segundo Süsserkind (1993) são os casos mais usuais para pontes com momento de inércia variável. A Figura 6 indica as leis de variação da altura que serão abordados.

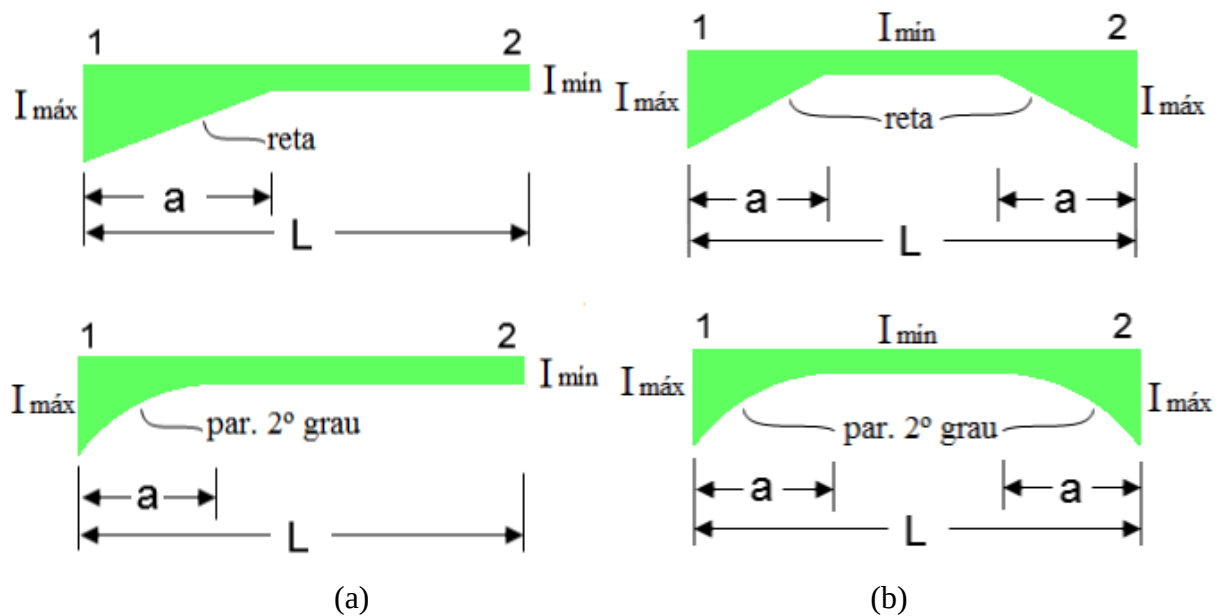


Figura 6: Mísulas (a) assimétricas e (b) simétricas.
Fonte: Autores, 2018.

Conforme apresentado na Figura 6, será estabelecido que em caso de mísula assimétrica, a maior inércia da barra ($I_{\text{máx}}$) estará sempre vinculada à extremidade esquerda.

A variação da inércia será determinada pela variação da altura (h) da seção, no caso de seção transversal retangular, mantendo constante a largura (b_w). Para o caso de Perfil I e Perfil T, apenas a altura (h) da alma será variável, mantendo-se constantes a espessura (t_w) da alma, a largura (b_w) e as espessuras (e_1) e (e_2) das mesas. A Figura 7 ilustra as seções transversais consideradas, bem como a nomenclatura adotada para suas dimensões.

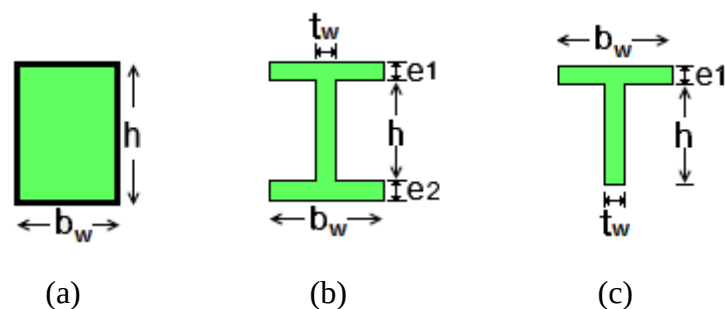


Figura 7: Seção transversal (a) retangular, (b) Perfil I e (c) Perfil T.
Fonte: Autores, 2018.

Vale ressaltar que, em caso de Perfil I, será considerada a possibilidade das mesas possuírem espessuras distintas. Além disso, caso a largura (b_w) da mesa for igual à altura total da seção (H), o perfil poderá ser denominado Perfil H.

A lei de variação da inércia será calculada em função da variação da altura, cuja equação será denominada $h(x)$, em que são conhecidos dois valores da altura da seção transversal indicadas pelo usuário: a altura máxima ($H_{\text{máx}}$) e mínima ($H_{\text{mín}}$).

Para mísula reta, a variação da altura ocorre linearmente segundo uma equação do 1º grau. A Figura 8 ilustra uma mísula reta simétrica que apresenta os dois casos de variação linear da altura (decrecente e crescente), conduzindo a duas equações diferentes de $h(x)$.

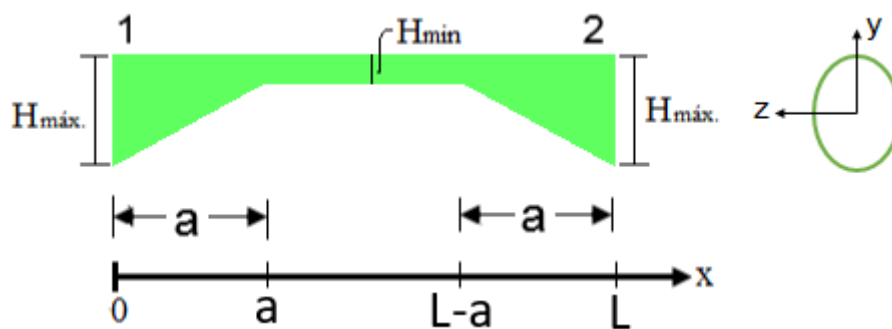


Figura 8: Mísula reta com altura decrescente e crescente com indicação das dimensões conhecidas.
Fonte: Autores, 2018.

Em relação à altura decrescente que se inicia na extremidade (1), são conhecidos dois pontos que relacionam a abscissa (x) com a altura da mísula: os pontos $(0, H_{\text{máx}})$ e $(a, H_{\text{mín}})$. Por semelhança de triângulos, obtém-se a lei de variação da altura dessa mísula:

$$h(x) = H_{\text{máx}} - (H_{\text{máx}} - H_{\text{mín}}) \frac{x}{a} \quad (17.0)$$

Para a altura crescente deve ser observado que a origem da mesma não coincide com a origem do eixo (x), mas com a abscissa $(L-a)$. Portanto, a lei de variação é tal que em $x=(L-a)$, a altura seja mínima. Feita as devidas modificações, obtém-se:

$$h(x) = H_{\text{mín}} + \left(\frac{H_{\text{máx}} - H_{\text{mín}}}{a} \right) \cdot (x - (L - a)) \quad (18.0)$$

Em relação às mísulas parabólicas será estabelecido que o vértice da parábola de 2º grau coincidirá com o ponto de menor inércia da barra. Assim, em caso de mísula com trecho parabólico-retilíneo, o trecho retilíneo será sempre tangente à parábola, conforme Figura 9.

Esse modelo foi adotado para que os casos abordados sejam compatíveis com os casos originalmente divulgados por Guldan (1956).

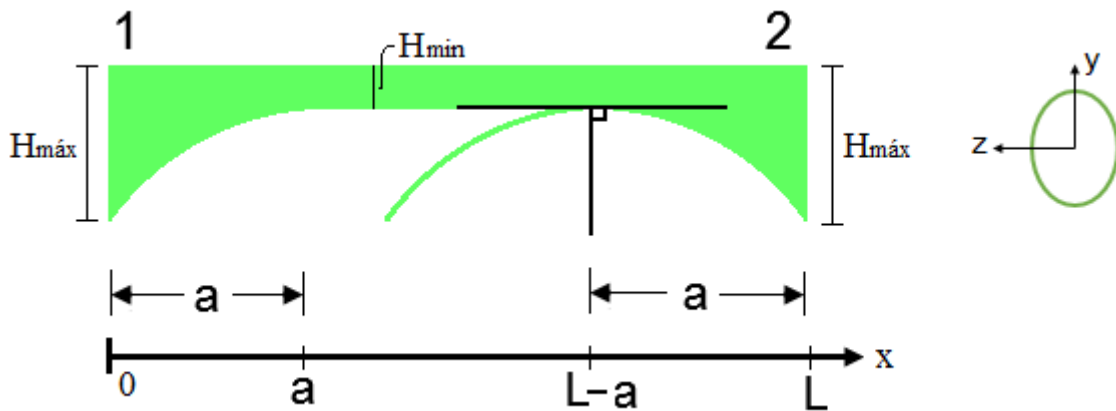


Figura 9: Mísula parabólica com indicação das dimensões conhecidas e ponto de tangência.
Fonte: Autores, 2018.

Desse modo, para determinação da equação que rege a variação da altura da mísula parabólica, será pré-estabelecido que os pontos de coordenadas $(a, H_{\min})$ e $(L-a, H_{\min})$ são os vértices da parábola. Vale ressaltar que a mísula simétrica é formada por uma única parábola dividida exatamente no vértice pelo trecho retilíneo. Em caso de $L=2a$, a mísula apresenta uma parábola contínua com vértice no centro da barra.

Para o primeiro trecho da parábola, com origem na extremidade (1), são conhecidos os pontos de coordenadas $(0, H_{\max})$ e $(a, H_{\min})$. Sendo a função de 2º grau do tipo $h(x) = mx^2 + \eta x + c$, a substituição do primeiro ponto resulta em $c = H_{\max}$. Para a determinação dos coeficientes (m) e (η) , basta considerar as coordenadas do vértice coincidentes ao ponto $(a, H_{\min})$. Desenvolvendo as equações e isolando os coeficientes, a equação da altura da mísula parabólica é dada por:

$$h(x) = \frac{(H_{\max} - H_{\min})}{a^2} x^2 - \frac{2 \cdot (H_{\max} - H_{\min})}{a} x + H_{\max} \quad (19.0)$$

Em caso de ser a mísula simétrica com trecho retilíneo, a equação (19.0) deve ser corrigida para que atenda corretamente as alturas do segundo trecho em mísula, uma vez que o trecho reto provoca uma descontinuidade da parábola. Para isso, a partir de $x=(L-a)$, tem-se:

$$h(x) = \frac{(H_{\max} - H_{\min})}{a^2} (x - (L - 2a))^2 - \frac{2 \cdot (H_{\max} - H_{\min})}{a} (x - (L - 2a)) + H_{\max} \quad (20.0)$$

Conhecidas as leis de variação da altura para cada mísula, a lei de variação do momento de inércia para uma seção retangular em relação ao eixo (z), que passa pelo CG da seção transversal é dada pela equação (21.0), encontrada em qualquer livro texto da Mecânica.

$$I_z(x) = \frac{b_w h(x)^3}{12} \quad (21.0)$$

Em relação ao perfil I, a inércia (I_z) é calculada pelo método da somatória, em que se considera esse perfil como resultado da composição de duas seções retangulares. Considerando-se que as mesas podem ter espessuras diferentes entre si, o centroide não mais coincide com o eixo de simetria em (z), devendo-se calcular o CG do perfil I em relação ao eixo (y). O cálculo do centroide (y_c) é apresentado pela equação (22.0) e o momento de inércia em (z) é obtida pela aplicação da equação (21.0) e do Teorema dos Eixos Paralelos aos dois retângulos que compõem o Perfil I, resultando na equação (23.0).

$$y_c(x) = \frac{\frac{b_w}{2}(h(x) + e1 + e2)^2 - \left(\frac{h(x)}{2} + e2\right)(b_w - t_w).h(x)}{b_w(h(x) + e1 + e2) - (b_w - t_w)h(x)} \quad (22.0)$$

$$I_z(x) = \left[\frac{b_w}{12}(h(x) + e1 + e2)^3 + b_w(h(x) + e1 + e2) \left(y_c(x) - \frac{h(x) + e1 + e2}{2} \right)^2 \right] - \left[(b_w - t_w) \frac{h(x)^3}{12} + (b_w - t_w).h(x) \left(y_c(x) - \frac{h(x)}{2} - e2 \right)^2 \right] \quad (23.0)$$

O momento de inércia (I_z) do Perfil T é calculado pela equação (23.0), considerando-se nula a espessura de uma das mesas.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Com base na metodologia apresentada, desenvolveu-se em linguagem *Object Pascal*, por meio do ambiente de desenvolvimento integrado *Lazarus*, o programa *MiSULA MATH* para cálculo da combinação de diagramas de momentos fletores nos sistemas real e virtual de barras retas, isoladas, submetidas à flexão. O programa também calcula os coeficientes de

entrada e saída pertinentes à metodologia de Guldán (1956), os momentos de inércia e centroides referentes às seções de altura máxima e mínima. Conforme a interface apresentada na Figura 10, o programa disponibiliza combinações de diagramas triangulares e trapezoidais (incluindo os retangulares), além dos diagramas causados pela aplicação de carga externa concentrada, carga-momento concentrada e carga linearmente distribuída em todo o vão da barra.

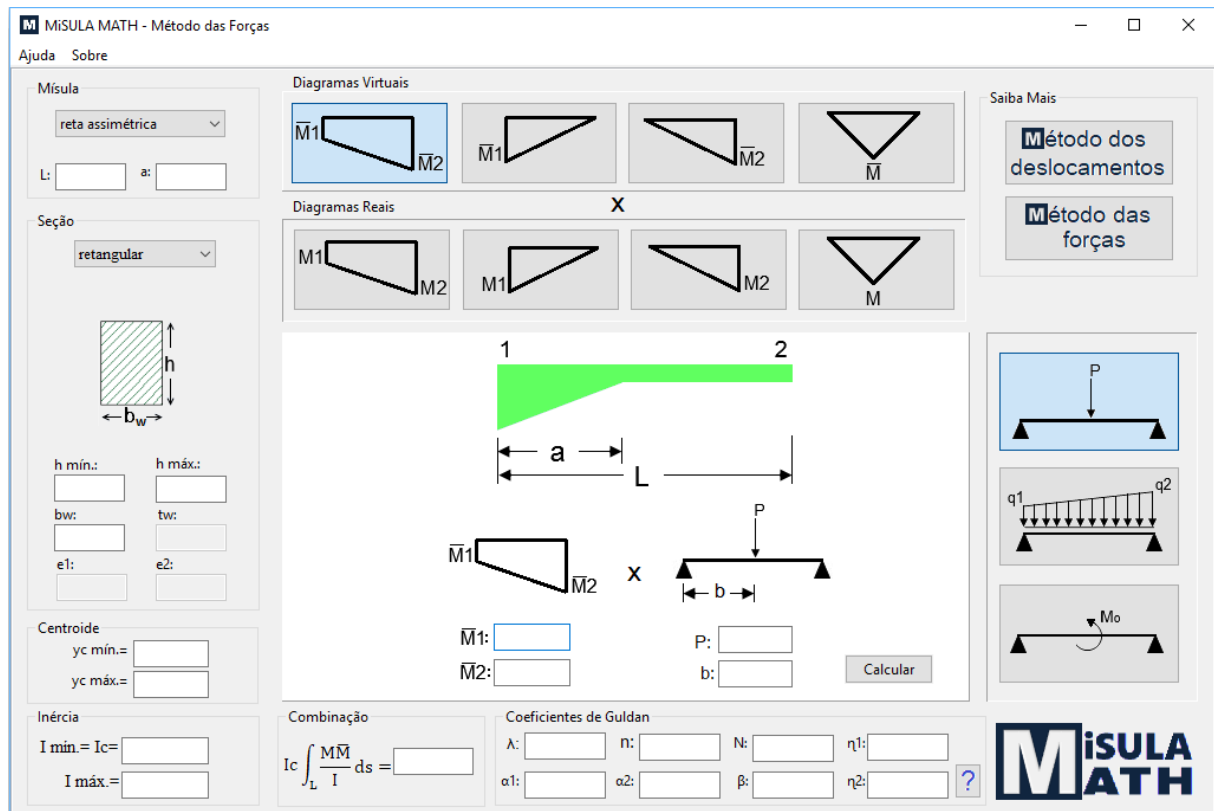


Figura 10: Interface do programa MiSULA MATH – Método das Forças.
Fonte: Autores, 2018.

Alguns resultados obtidos por essa implementação são comparados com os resultados das tabelas atribuídas a Guldán (1956), apresentadas por Sússekínd (1993), Polillo (1982) e Rocha (1976), e pela implementação feita em *Software Matemático* (SM), cujo resultado é exato, por resolver integrais analiticamente sem aplicação de métodos numéricos.

Considerando-se uma barra em mísula reta assimétrica ($\lambda=0,4$), de seção transversal retangular, em que os casos de combinação nos sistemas real e virtual desta barra sejam de diagramas triangulares, conforme Figura 11, as expressões matemáticas que fornecem o resultado dessas combinações estão em função dos coeficientes (α_1), (α_2) e (β). A Tabela 2 apresenta o valor desses coeficientes obtidos por Guldán (1956), pelo MiSULA MATH (MM) e por *Software Matemático* (SM), dado a relação entre a inércia mínima ($I_{\min}$) e máxima ($I_{\max}$)

variando de 1,000 a 0,005. Os resultados de MM e SM foram arredondados para três casas decimais.

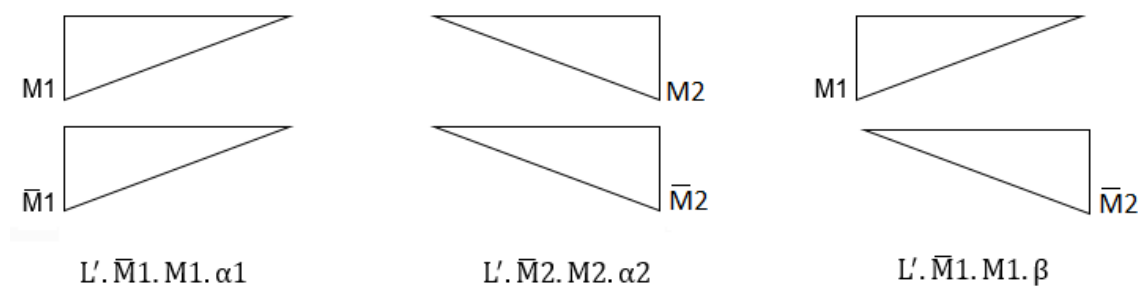


Figura 11: Combinação de diagramas e respectiva expressão em função dos coeficientes α_1 , α_2 , β .
Fontes: Autores, 2018.

Tabela 2: Coeficientes para cálculo da combinação de diagramas triangulares de barras em mísula reta assimétrica (Imín/Imáx variando de 1,000 a 0,005).

Imín/Imáx		1,000	0,900	0,800	0,700	0,600	0,500	0,400	0,300	0,200	0,150
α_1	Guldan	0,333	0,318	0,302	0,285	0,267	0,248	0,227	0,204	0,178	0,163
	MM	0,333	0,318	0,302	0,285	0,267	0,248	0,227	0,204	0,178	0,163
	SM	0,333	0,318	0,302	0,285	0,267	0,248	0,227	0,204	0,178	0,163
α_2	Guldan	0,333	0,333	0,332	0,331	0,331	0,330	0,329	0,328	0,326	0,325
	MM	0,333	0,333	0,332	0,332	0,331	0,330	0,329	0,328	0,326	0,325
	SM	0,333	0,333	0,332	0,332	0,331	0,330	0,329	0,328	0,326	0,325
β	Guldan	0,166	0,164	0,162	0,160	0,157	0,154	0,150	0,146	0,141	0,138
	MM	0,167	0,165	0,162	0,160	0,157	0,154	0,150	0,146	0,141	0,138
	SM	0,167	0,165	0,162	0,160	0,157	0,154	0,150	0,146	0,141	0,138

Continuação Tabela 2.

Imín/Imáx		0,120	0,100	0,080	0,060	0,050	0,040	0,030	0,020	0,010	0,005
α_1	Guldan	0,153	0,145	0,137	0,128	0,123	0,118	0,112	0,105	0,096	0,090
	MM	0,153	0,145	0,137	0,128	0,124	0,118	0,112	0,105	0,096	0,090
	SM	0,153	0,145	0,137	0,128	0,124	0,118	0,112	0,105	0,096	0,090
α_2	Guldan	0,324	0,324	0,323	0,322	0,322	0,321	0,320	0,319	0,318	0,317
	MM	0,324	0,324	0,323	0,322	0,322	0,321	0,320	0,319	0,318	0,317
	SM	0,324	0,324	0,323	0,322	0,322	0,321	0,320	0,319	0,318	0,317
β	Guldan	0,135	0,134	0,132	0,129	0,128	0,126	0,125	0,122	0,119	0,117
	MM	0,135	0,134	0,132	0,129	0,128	0,126	0,125	0,122	0,119	0,117
	SM	0,135	0,134	0,132	0,129	0,128	0,126	0,125	0,122	0,119	0,117

Fonte: Autores, 2018.

A partir da comparação de resultados observa-se que não houve divergência nos valores apresentados pelo MiSULA MATH (MM) e pelo *Software* Matemático (SM), o que indica estar correta a presente metodologia. Em relação aos valores de Guldan (1956), as diferenças são mínimas e ocorreram em poucos casos, podendo ser justificado pelo fato de não se conhecer o critério utilizado para apresentação dos resultados com três casas decimais

em Süsskind (1993), uma vez que os resultados de MM e SM foram arredondados na terceira casa decimal. O MiSULA MATH apresenta ainda, em relação as tabelas atribuídas a Guldán (1956), a vantagem de calcular os coeficientes (α_1), (α_2) e (β) para quaisquer valores das relações $I_{\min}/I_{\max}$ e a/L . Apesar da interface inicial do programa disponibilizar as seções transversais retangular e perfil I, os resultados são válidos para todas as seções transversais cuja relação $I_{\min}/I_{\max}$ for a mesma.

A Tabela 3 apresenta o valor dos coeficientes (α_1) e (α_2) obtidos pela combinação de mísica parabólica assimétrica ($\lambda=0,6$) solicitada por carregamento uniformemente distribuído (q) e diagrama virtual trapezoidal, conforme a Figura 12. Na tabela 3 são comparados os resultados de Guldán (1956), MM e SM, sendo os dois últimos arredondados em quatro casas decimais.

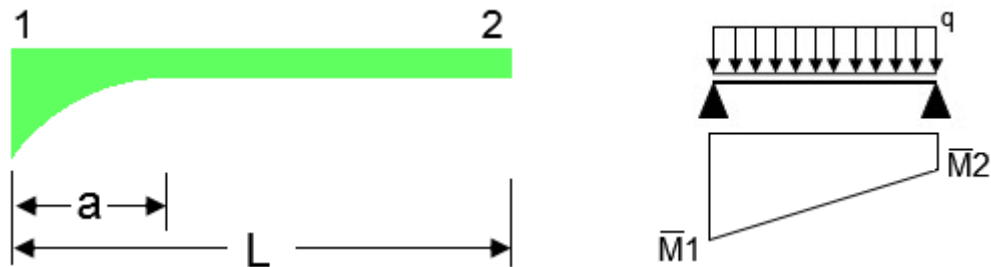


Figura 12: Viga em mísica parabólica assimétrica com carregamento uniformemente distribuído.
Fonte: Autores, 2018.

Tabela 3: Coeficientes para cálculo da combinação de diagrama trapezoidal e carga uniformemente distribuída em barra com mísica parabólica assimétrica ($I_{\min}/I_{\max}$ variando de 1,000 a 0,005).

$I_{\min}/I_{\max}$	1,000	0,900	0,800	0,700	0,600	0,500	0,400	0,300	0,200	0,150
α_1 Guldán	0,0416	0,0408	0,0398	0,0387	0,0375	0,0361	0,0345	0,0326	0,0302	0,0287
MM	0,0417	0,0408	0,0398	0,0387	0,0375	0,0361	0,0345	0,0326	0,0302	0,0287
SM	0,0417	0,0408	0,0398	0,0387	0,0375	0,0361	0,0345	0,0326	0,0302	0,0287
α_2 Guldán	0,0416	0,0414	0,0412	0,0408	0,0404	0,0400	0,0395	0,0388	0,0379	0,0373
MM	0,0417	0,0414	0,0411	0,0408	0,0404	0,0400	0,0395	0,0388	0,0379	0,0373
SM	0,0417	0,0414	0,0411	0,0408	0,0404	0,0400	0,0395	0,0388	0,0379	0,0373

Continuação Tabela 3

$I_{\min}/I_{\max}$	0,120	0,100	0,080	0,060	0,050	0,040	0,030	0,020	0,010	0,005
α_1 Guldán	0,0276	0,2670	0,0257	0,0245	0,0238	0,0230	0,0220	0,0207	0,0188	0,0172
MM	0,0276	0,2670	0,0257	0,0245	0,0238	0,0230	0,0220	0,0207	0,0188	0,0172
SM	0,0276	0,2670	0,0257	0,0245	0,0238	0,0230	0,0220	0,0207	0,0188	0,0172
α_2 Guldán	0,0368	0,0365	0,0360	0,0355	0,0351	0,0347	0,0342	0,0335	0,0324	0,0314
MM	0,0368	0,0365	0,0360	0,0355	0,0351	0,0347	0,0342	0,0335	0,0324	0,0314
SM	0,0368	0,0365	0,0360	0,0355	0,0351	0,0347	0,0342	0,0335	0,0324	0,0314

Fonte: Autores, 2018.

Observa-se nessa comparação que houve divergência mínima nos resultados obtidos pelo MM e SM em relação aos de Guldan (1956), sendo que os dois primeiros apresentaram os mesmo resultados para todos os casos comparados e ambos utilizaram cálculo computacional.

A Figura 13 ilustra a combinação de carga concentrada ($N=3$) atuando em uma viga com mísula parabólica simétrica ($\lambda=0,5$) e diagrama virtual trapezoidal. A Tabela 4 apresenta os coeficientes (η_1) e (η_2) referentes a essa combinação obtidos por Guldan (1956), MM e SM, com quatro casas decimais.

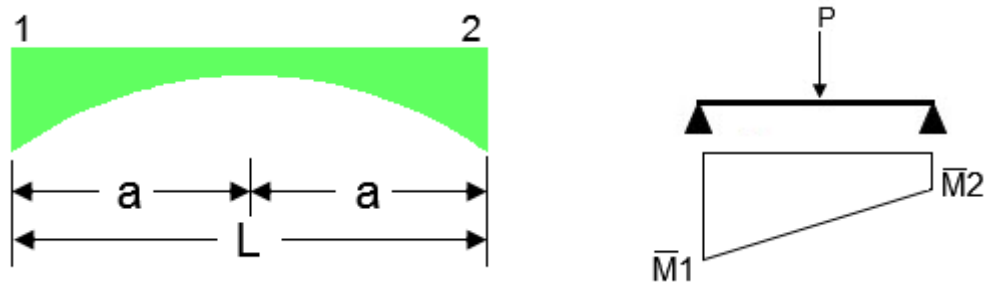


Figura 13: Combinação de diagrama trapezoidal com carga concentrada atuando em viga com mísula parabólica simétrica. Fonte: Autores, 2018.

Tabela 4: Coeficientes para cálculo da combinação de diagrama trapezoidal e carga concentrada em barra com mísula parabólica simétrica ($I_{\min}/I_{\max}$ variando de 1,000 a 0,005).

$I_{\min}/I_{\max}$		1,000	0,500	0,200	0,100	0,050	0,030
η_1	Guldan	0,0547	0,0465	0,0379	0,0324	0,0279	0,0250
	MM	0,0547	0,0466	0,0379	0,0324	0,0279	0,0250
	SM	0,0547	0,0466	0,0379	0,0324	0,0279	0,0250
η_2	Guldan	0,0390	0,0345	0,0295	0,0261	0,0232	0,0212
	MM	0,0391	0,0346	0,0295	0,0261	0,0232	0,0212
	SM	0,0391	0,0346	0,0295	0,0261	0,0232	0,0212

Fonte: Autores, 2018.

Mais uma vez, a divergência entre resultados é mínima, ocorrendo apenas na quarta casa decimal e, considerando os resultados obtidos computacionalmente, não houve erro. Quanto à vantagem do cálculo feito no MiSULA MATH em relação ao tabelado por Guldan (1956), os coeficientes (η_1) e (η_2) podem ser determinados para quaisquer valores das relações $N=12b/L$, $n=I_{\min}/I_{\max}$ e $\lambda=a/L$.

A Tabela 5 apresenta os valores do termo $EIc\bar{P}\delta$, da equação (8.0), fornecidos pelo MM e SM devido combinação de diagrama virtual trapezoidal com uma viga em mísula reta simétrica ($\lambda=0,2$) solicitada por carga linearmente distribuída (Figura 14). A comparação feita

na Tabela 5 não inclui os resultados de Guldán (1956), uma vez que Süsserkind (1993) disponibiliza apenas combinação com carga uniformemente distribuída.

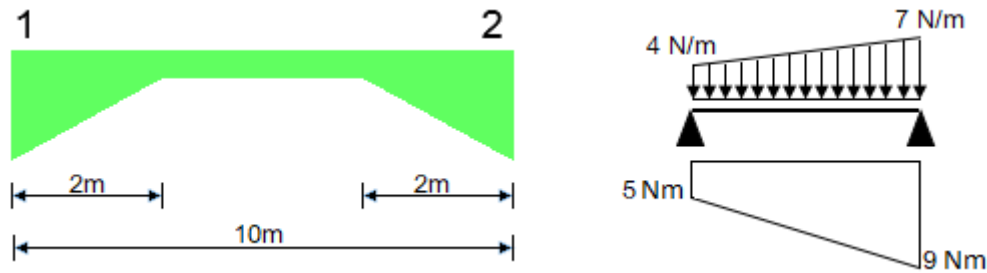


Figura 14: Combinação de diagrama trapezoidal com carga linearmente distribuída atuando em viga com mística reta simétrica. Fonte: Autores, 2018.

Tabela 5: Valores de $EI\bar{C}\bar{P}\delta$ para combinação de diagrama virtual trapezoidal e carregamento linearmente distribuído em viga com mística reta simétrica ($I_{mín}/I_{máx}$ variando de 1,000 a 0,030).

$I_{mín}/I_{máx}$	1,000	0,500	0,200	0,100	0,050	0,030
MM	3225,000000	3080,370947	2935,758227	2853,295607	2788,524656	2749,849487
SM	3225,000000	3080,370947	2935,758227	2853,295607	2788,524656	2749,849487

Fonte: Autores, 2018.

Os resultados da Tabela 5, com seis casas decimais, demonstram o grau de exatidão do método da quadratura gaussiana, uma vez que não houve erro entre os valores obtidos pelo MiSULA MATH e pelo *Software* Matemático, sendo que o primeiro utiliza integração por Gauss-Legendre e o segundo, integração algébrica.

CONCLUSÕES

Mediante os resultados apresentados, verifica-se que o cálculo da combinação de diagramas de momentos fletores pelo Princípio das Forças Virtuais em barras com mística reta ou parabólica utilizando-se integração numérica é possível e eficiente, pois fornece resultados com alto grau de exatidão.

A partir dessa metodologia, um programa pôde ser facilmente implementado para o cálculo computacional dessas combinações, bem como dos coeficientes pertinentes as tabelas atribuídas a Guldán (1956). Desse programa, ressalta-se a vantagem, quando comparado as referidas tabelas, de calcular os coeficientes (α_1), (α_2), (β), (η_1) e (η_2) para quaisquer valores das relações N , n e λ . Com isso, o programa evita a necessidade de realizar interpolações para adequação dos argumentos de entrada, e viabiliza o cálculo de casos de combinações

inexistentes nas tabelas de Guldán (1956), tal como aquelas que envolvem carga linearmente distribuída ou carga-momento.

Sugere-se, para trabalhos futuros, que a implementação seja expandida para o caso de barras sujeitas a outras solicitações externas e variações do momento de inércia.

REFERÊNCIAS

CALDERÓN, E. T. **Cálculo de deslocamentos em estruturas isostáticas de barras com momento de inércia variável utilizando-se integração numérica**. Revista Mirante, v. 10, n. 2, Anápolis, 2017.

GILAT, A.; SUBRAMANIAM, V. **Métodos numéricos para engenheiros e cientistas**. Porto Alegre: Bookman, 2008.

GULDAN, R. **Estructuras aporricadas y vigas continuas**. Buenos Aires. El Ateneo, 1956.

KAMERMANS, M. **Gaussian Quadrature Weights and Abcissae**, 2011. Disponível em: <<https://pomax.github.io/bezierinfo/legendre-gauss.html#n11>>. Acesso em: 15 maio 2018.

MARTHA, L. F. **Análise de Estruturas: Conceitos e Métodos Básicos**. Editora Elsevier, Rio de Janeiro, 2010.

POLILLO, A. **Exercícios de Hiperestática**. 5ª ed., Rio de Janeiro: Científica, 1982.

ROCHA, A. M. **Teoria e Prática das Estruturas**. 5ª ed., vol. 2, Rio de Janeiro: Científica, 1976.

SORIANO, H. L. e LIMA, S. S. **Análise de Estruturas – Método das Forças e Método dos Deslocamentos**. 2ª ed., Editora Ciência Moderna LTDA, Rio de Janeiro, 2006.

SPERANDIO, D.; MENDES, J. T.; SILVA, L. H. M. **Cálculo Numérico – Características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos**. Editora Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2003.

SÜSSEKIND, J. C. **Curso de Análise Estrutural – v.2: Deformações em estruturas. Método das forças**. Editora Globo, 10 ed., São Paulo, 1993.

VILELA, P. C. S.; MARTHA, L. F. **Soluções Fundamentais para barras em mísula segundo a analogia da viga conjugada**. XXIX CILAMCE, Maceió, Brasil, 2008.