

CÁLCULO COMPUTACIONAL DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS PARA BARRAS ISOLADAS COM INÉRCIA VARIANDO EM MÍSULA

CÁLCULO COMPUTACIONAL DE SOLUCIONES FUNDAMENTALES PARA BARRAS AISLADAS CON ACARTELAMIENTO

VINÍCIUS DE BARROS SOUZA

Graduando em Engenharia Civil pela Universidade Estadual de Goiás, Câmpus
Anápolis de Ciências Exatas e Tecnológicas
viniciuswg@hotmail.com

EDSON TEJERINA CALDERÓN

Doutor em Engenharia Civil e Professor da Universidade Estadual de Goiás, Câmpus
Anápolis de Ciências Exatas e Tecnológicas
edtejerin@uol.com.br

Resumo: As barras com seção transversal variável, denominadas vigas em mísula, são geralmente utilizadas para aumentar as seções nos pontos de ligação entre pilares e vigas, com objetivo de combater as forças cortantes e aumentar o grau de engastamento, além de reduzir a área de aço na ligação. O cálculo de pórticos pelo método dos deslocamentos resulta de uma superposição de soluções cinematicamente determinadas, em que cada configuração deformada das barras isoladas da estrutura é uma solução fundamental para o método. Para estruturas com mísula, as soluções fundamentais são obtidas com auxílio de tabelas que fornecem os coeficientes necessários ao cálculo dos parâmetros fundamentais (momentos de engastamento perfeito e coeficientes de rigidez locais) de uma barra isolada. Apesar disso, essas tabelas apresentam limitações quanto aos tipos de ações externas e quanto aos argumentos de entrada (parâmetros adimensionais), obrigando o usuário a realizar interpolações cujos resultados podem apresentar, ainda que pequenos, erros consideráveis para o cálculo estrutural. Nesse sentido, o presente trabalho propõe uma metodologia para o cálculo computacional das soluções fundamentais de barras isoladas submetidas à flexão com momento de inércia variando em mísula (reta ou parabólica) baseada no método das forças. A metodologia apresentada utiliza o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) para cálculo dos coeficientes de flexibilidade, os quais resultam em integrais cujas soluções algébricas são bastante trabalhosas. Para possibilitar a implementação computacional, essas integrais foram resolvidas numericamente por quadratura gaussiana. A eficiência da metodologia proposta e o grau de convergência dos resultados foram comprovados por comparação dos valores obtidos pelo programa computacional desenvolvido pelos autores e os casos equivalentes divulgados por Guldan (1956) e Vilela et al. (2008), com os resultados obtidos por integração algébrica realizados com software matemático.

Palavras-chave: Mísula. Método dos Deslocamentos. Cálculo Computacional. Soluções Fundamentais.

Resumen: Las vigas con sección transversal variable, denominadas vigas acarteladas, son generalmente utilizadas para aumentar las secciones en los puntos de ligación entre pilares y vigas, con el objetivo de combatir las fuerzas cortantes y aumentar el grado de empotramiento, además de reducir el área de acero en la ligación. El cálculo de pórticos por el método de los desplazamientos resulta de una superposición de soluciones cinematicamente determinadas, en que cada configuración deformada de las barras aisladas de la estructura es una solución fundamental para el método. Para estructuras con acartelamiento, las soluciones fundamentales son obtenidas con el auxilio de tablas que brindan los coeficientes necesarios al cálculo de los parámetros fundamentales (momentos de empotramiento perfecto y coeficientes de rigidez locales) de una barra aislada. Apesar de eso, esas tablas presentan limitaciones en relación a los tipos de acciones externas y a los argumentos de entrada (parámetros adimensionales), obligando al usuario a realizar interpolaciones cuyos resultados pueden presentar, aunque sean pequeños, errores considerables para el cálculo estructural. En ese sentido, el presente trabajo propone una metodología para el cálculo computacional de soluciones fundamentales de barras aisladas sometidas a flexión con momento de inércia variable de la sección (con acartelamiento recto o parabólico) basada en el método de las fuerzas. La metodología presentada utiliza el Princípio de los Trabajos Virtuales (PTV) para el cálculo de los coeficientes de flexibilidad, los cuales resultan en integrales cuyas soluciones

algebraicas son bastante trabajosas. Para hacer posible la implementación computacional, esas integrales fueron resueltas numericamente por la cuadratura gaussiana. La eficiencia de la metodología propuesta y el grado de convergencia de los resultados fueron comprobados por comparación de los valores obtenidos por el programa computacional desarrollado por los autores y los casos equivalentes divulgados por Guldan (1956) y Vilela et al. (2008), con los resultados obtenidos por integración algebraica realizados con software matemático.

Palabras clave: Acartelamiento. Método de los Desplazamientos. Cálculo Computacional. Soluciones Fundamentales.

INTRODUÇÃO

O conhecimento do comportamento de uma estrutura submetida a diferentes solicitações é uma premissa básica para o dimensionamento seguro de seus elementos. Mais do que o conhecimento, o profissional da Engenharia Civil precisa entender como esse comportamento, associado aos esforços por ele provocado, afeta a estrutura como um todo. Para isso a Engenharia das Estruturas trabalha com modelos, baseados em teorias e hipóteses, que buscam reproduzir, com fidelidade, o real comportamento da estrutura na natureza.

Os métodos de análises de estruturas utilizam, de forma geral, um conjunto de variáveis ou parâmetros para representar o comportamento de uma estrutura. Nesses métodos, o comportamento analítico do modelo estrutural é substituído por um comportamento discreto, denominado discretização, no qual as soluções analíticas contínuas são representadas pelos valores discretos dos parâmetros adotados. Os tipos de parâmetros adotados no modelo discreto dependem do método utilizado. No método dos deslocamentos, os parâmetros são deslocamentos ou rotações (MARTHA, 2010).

De acordo com Soriano (2006), o método dos deslocamentos é o mais importante método de análise de estruturas, por ser amplamente utilizado em programações automáticas. A metodologia de análise pelo método dos deslocamentos (MARTHA, 2010) faz uma discretização do comportamento contínuo de uma estrutura que resulta em uma superposição de soluções cinematicamente determinadas. Uma configuração deformada elementar isola um determinado efeito ou parâmetro que representa o comportamento cinemático (deformado) da estrutura. Cada configuração deformada elementar é composta de configurações deformadas elementares de suas barras. As configurações deformadas elementares de barras isoladas são as soluções fundamentais para o método dos deslocamentos.

A resolução, pelo método dos deslocamentos, de estruturas que possuem barras com inércia variável, recai na determinação dos parâmetros fundamentais, que são coeficientes de rigidez dessas barras em suas extremidades e os momentos nos engastes causados por carregamento externo atuante. A determinação de todos estes valores significará,

evidentemente, a resolução de uma viga biengastada (ou engastada articulada), de inércia variável, para um deslocamento unitário (translação ou rotação) em uma de suas extremidades ou para a atuação do carregamento externo.

Para barras prismáticas (rigidez constante), os parâmetros fundamentais são conhecidos e amplamente difundidos pela literatura de análise de estruturas, uma vez que podem ser facilmente calculados analiticamente. O mesmo não ocorre para barras com inércia variável, em que o cálculo analítico desses parâmetros é demasiado trabalhoso, pois envolve a resolução de integrais com divisão de polinômios que exigem a aplicação de métodos matemáticos complexos para cada lei de variação da inércia. Para o caso particular de inércia variando em mísula reta ou parabólica este problema é contornado com o auxílio de tabelas, apresentadas pela primeira vez por Guldan (1956), as quais fornecem os coeficientes necessários ao cálculo dos parâmetros fundamentais de uma barra isolada. No entanto, essas tabelas apresentam limitações quanto aos argumentos de entrada e os tipos de carregamentos externos solicitantes (carga concentrada e carga uniformemente distribuída).

Em virtude dessas limitações, o presente trabalho apresenta uma metodologia para determinação das soluções fundamentais para o caso geral de barras retas com inércia variável utilizando-se o método das forças, no qual os coeficientes de flexibilidade são calculados pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais, cujas integrais são resolvidas numericamente por quadratura gaussiana. Paralelo a isso, é apresentado um programa computacional, desenvolvido no software de código aberto *Lazarus* e implementado a partir da metodologia proposta, para o cálculo das soluções fundamentais de barras isoladas (biengastadas ou engastada articulada) submetidas à flexão.

O programa considera barras de seção transversal retangular, perfil I e perfil T, com mísula simétrica ou assimétrica, cuja lei de variação da altura é linear ou parabólica. Também é disponibilizada a opção de quatro solicitações externas atuantes, simultâneas ou não: carga concentrada, carga-momento concentrada, variação da temperatura e carga linearmente distribuída. Para idealização do comportamento de barras à flexão considerou-se a *Teoria das Vigas de Navier*.

METODOLOGIA

Convenção de sinais e notações

O sistema de coordenadas locais adotado é tal que o eixo axial da barra (x), com origem na extremidade esquerda, passe pelo centro de gravidade (CG) das seções transversais e os demais eixos sejam transversais à barra, conforme Figura 1.

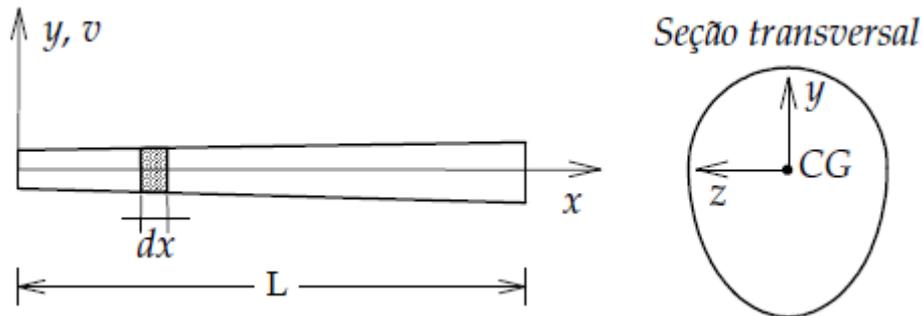


Figura 1: Sistema de eixos locais adotados (modificado - VILELA et al., 2008).

Com base nesse sistema de coordenadas, são definidos os sentidos positivo dos deslocamentos (transversal e rotação) a partir da convenção utilizada por Süsserkind (1991), em que os momentos e rotações nos extremos das barras são positivos no sentido trigonométrico ou anti-horário. Para o caso de deslocamento ortogonal recíproco, este será positivo quando a extremidade da direita da barra descer em relação à extremidade esquerda. Esta convenção é inteiramente compatível com a primeira, dos momentos e rotações.

Em relação aos esforços externos e internos, a convenção de sinais é definida de acordo com os seguintes parâmetros, ilustrados na Figura 2:

$q(x)$: taxa de carregamento linearmente distribuído ao longo do eixo da barra (positiva no sentido contrário de y);

P : carga concentrada transversalmente ao eixo da barra (positiva no sentido contrário de y);

M_0 : carga-momento concentrada no eixo da barra (positiva no sentido anti-horário);

$Q(x)$: força cortante (esforço interno transversal), positiva quando contornando a estrutura no sentido horário da seção transversal;

$M(x)$: momento fletor (esforço interno de flexão), positivo quando traciona as fibras inferiores da seção;

V_1 : reação transversal na extremidade inicial da barra, positiva no sentido de y .

M_1 : reação momento na extremidade inicial, positiva no sentido anti-horário.

V_2 : reação transversal na extremidade final da barra, positiva no sentido de y .

M_2 : reação momento na extremidade final, positiva no sentido anti-horário.

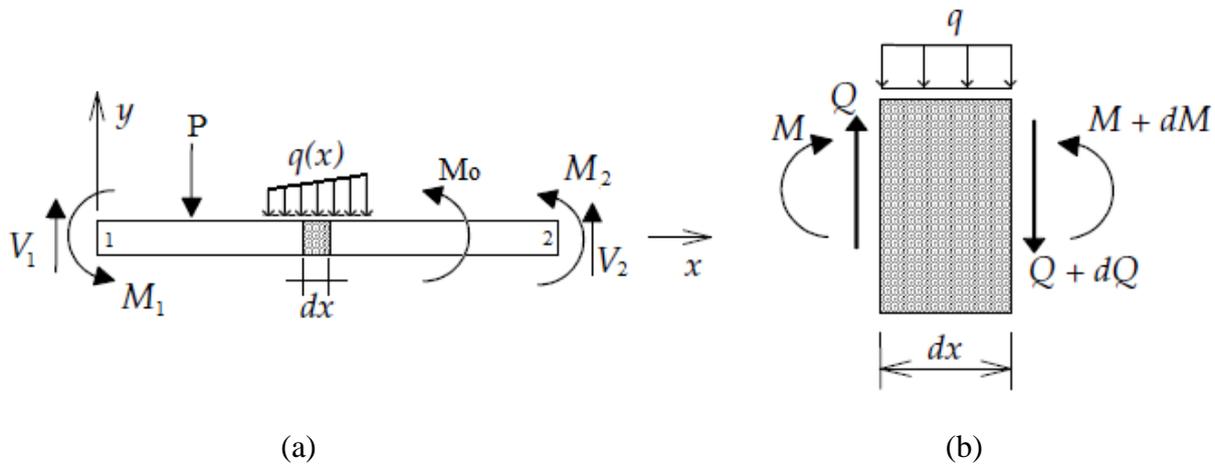


Figura 2: Sentido positivo adotado para (a) reações e cargas externas e (b) esforços internos (modificado - VILELA et al., 2008).

Neste trabalho e no programa computacional, as extremidades da barra serão identificadas por numerais, sendo (1) a extremidade inicial e (2) a extremidade final. Desse modo, todas as vinculações, reações e coeficientes relacionados à extremidade inicial serão identificados pelo índice (1). De maneira análoga, todas as grandezas referentes à extremidade final serão identificadas pelo índice (2).

As soluções fundamentais do método dos deslocamentos

A metodologia de análise do método dos deslocamentos consiste em somar uma série de soluções básicas cinematicamente determinadas, onde são conhecidas as configurações deformadas da estrutura associado a um determinado efeito. Isso é possível porque pode-se determinar a configuração deformada de uma barra isolada devido solicitações externas atuantes e deslocamentos. Segundo Martha (2010), as configurações deformadas elementares das barras isoladas são conhecidas como as soluções fundamentais para o método dos deslocamentos.

As soluções fundamentais de barras isoladas são constituídas por:

- Coeficientes de rigidez local: conhecidos também como fatores de forma de 2ª espécie são o conjunto de forças e momentos que devem atuar nas extremidades de uma barra para impor uma configuração deformada elementar em que apenas um deslocamento local da barra é não nulo.

- Reações de engastamento perfeito: são as reações de apoio para uma barra com as extremidades engastadas, resultantes da aplicação de um carregamento externo. De particular interesse para o método dos deslocamentos são os momentos de engastamento perfeito, conhecidos como fatores de carga de 2ª espécie.

De acordo com Martha (2010), as soluções fundamentais podem ser obtidas a partir de parâmetros fundamentais. No caso dos coeficientes de rigidez locais os parâmetros fundamentais para o comportamento transversal de flexão são os coeficientes de rigidez à rotação. Em relação às reações de engastamento perfeito de barras submetidas a solicitações transversais, os parâmetros fundamentais são os momentos nos engastes. Conhecido os parâmetros fundamentais, os demais coeficientes de rigidez podem ser determinados.

Para barras prismáticas, as soluções fundamentais são conhecidas e disponibilizadas em livros de análise de estruturas. Em se tratando de barras em mísula, Süsskind (1991) apresenta um roteiro para determinação dos parâmetros fundamentais de barras isoladas em mísula reta e parabólica com auxílio de tabelas, cuja autoria é atribuída à Guldan (1956). Nessas tabelas, são disponibilizados os coeficientes (α_1), (α_2), e (β) em função dos argumentos de entrada ($\lambda=a/L$ e $n=I_{\min}/I_{\max}$) para cálculo dos coeficientes de rigidez à rotação (a_1 e a_2), coeficientes de rigidez transversal (c_1 e c_2) e coeficiente de transmissão (t) utilizado na dedução do momento (b) mobilizado na extremidade oposta à aplicação de um deslocamento por rotação. Em relação aos carregamentos externos, são disponibilizados os coeficientes (K_1) e (K_2) para determinação dos momentos de engastamento perfeito (M_1 e M_2) em barras solicitadas por carga concentrada e carregamento uniformemente distribuído em todo o vão da barra.

Outros autores divulgaram tabelas e metodologias para o cálculo dos parâmetros fundamentais em barras com inércia variável. Vilela et al. (2008), por exemplo, implementou uma função em linguagem C para calcular os momentos de engastamento perfeito de uma barra com mísula reta solicitada por carregamento transversal linearmente distribuído e variação de temperatura, mais tarde estendido para mísulas com momento de inércia variando segundo um polinômio do 6º grau, que é equivalente à mísula parabólica do 2º grau.

Cálculo dos parâmetros fundamentais pelo método das forças

Como abordado na seção anterior, o problema da aplicação do método dos deslocamentos para estruturas com inércia variável recai no desconhecimento dos parâmetros fundamentais das barras isoladas da estrutura. Sabendo-se que os parâmetros fundamentais

são esforços atuantes numa barra isolada hiperestática (biengastada ou engastada e articulada), esses parâmetros podem ser convenientemente obtidos pelo método das forças, uma vez que as incógnitas desse método são os esforços hiperestáticos.

A análise de uma estrutura hiperestática pelo método das forças depende da determinação dos termos de carga e coeficientes de flexibilidade que aparecem no sistema final de equações de compatibilidade (MARTHA, 2010):

$$[\delta_{ij}]\{X_i\} = -\{\delta_{i0}\} \quad (1.1)$$

sendo:

$[\delta_{ij}]$ = matriz de flexibilidade;

$\{X_i\}$ = vetor de hiperestáticos; e

$\{\delta_{i0}\}$ = vetor dos termos de carga.

Por força do Teorema de Betti, a matriz de flexibilidade é simétrica, levando a $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.

Os termos (δ) da matriz de flexibilidade e do vetor de cargas correspondem a deslocamentos (rotações ou translações) nas direções dos vínculos eliminados. Formalmente tem-se (MARTHA, 2010):

δ_{ij} (coeficientes de flexibilidade) = deslocamento na direção do vínculo eliminado associado ao hiperestático X_i provocado pela atuação isolada do hiperestático $X_j=1$ no sistema principal (SP);

δ_{i0} (termos de carga) = deslocamento na direção do vínculo eliminado associado ao hiperestático X_i quando a sollicitação externa atua isoladamente no SP ($X_j=0$). Nos casos em que a sollicitação externa for recalque ou variação de temperatura, emprega-se a notação δ_{ir} e δ_{it} , respectivamente.

Sendo assim, para se aplicar o método das forças, é necessário aplicar alguma metodologia para o cálculo dos deslocamentos em pontos da estrutura isostática do SP. No caso de barras com inércia constante, o cálculo é simplificado pela utilização de fórmulas prontas tabeladas por Kurt-Beyer, que fornecem o valor da integral $\int M\bar{M}dx$. O problema se resume, basicamente, no traçado dos diagramas do momento fletor do sistema real e virtual da barra e determinação do momento fletor em pontos específicos do diagrama.

Como este trabalho se propõe ao cálculo das soluções fundamentais para barras em mísula, deve-se utilizar uma formulação que considere a lei de variação da inércia. Por isso, decidiu-se que os coeficientes de flexibilidade e termos de carga serão calculados pela

aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), cuja expressão geral para pórticos planos é dada pela Equação (1.2):

$$\bar{P} \cdot \delta = \int_L \frac{N \cdot \bar{N}}{E \cdot A} dx + \int_L \chi \frac{Q \cdot \bar{Q}}{G \cdot A} dx + \int_L \frac{M \cdot \bar{M}}{E \cdot I} dx \quad (1.2)$$

sendo:

\bar{P} = esforço virtual;

δ = deslocamento;

N = esforço normal provocado pela solicitação externa;

\bar{N} = esforço normal provocado por $X_j=1$;

E = módulo de elasticidade longitudinal;

A = área da seção transversal;

Q = força cortante provocado pela solicitação externa;

\bar{Q} = força cortante provocado por $X_j=1$;

χ = fator de forma da seção transversal;

G = módulo de elasticidade transversal;

M = momento fletor provocado pela solicitação externa;

\bar{M} = momento fletor provocado por $X_j=1$; e

I = momento de inércia da seção transversal.

De acordo com Süsserkind (1993), a influência da força cortante apresenta valor considerável somente em casos de vãos muito curtos e cargas muito elevadas, podendo ser

desprezada a parcela $\int_L \chi \frac{Q \bar{Q}}{GA} ds$, com erro mínimo. Também pode-se desprezar, com erro

tolerável, a parcela $\int_L \frac{N \bar{N}}{EA} ds$ referente ao efeito axial para peças de estruturas que não

trabalhem fundamentalmente à força normal (não seria aceitável desprezá-la no estudo de arcos, escoras, tirantes, pilares, treliças e peças protendidas em geral). Sendo assim, será considerada a parcela relativa ao momento fletor, que é a mais significativa para o caso de barras submetidas à flexão.

O roteiro de cálculo que será apresentado utilizará como exemplo uma barra biengastada, com módulo de elasticidade constante e inércia variável. Ao final da seção serão

feitas as observações para o caso de sistema hipergeométrico (SH) com uma das extremidades articuladas.

Para o cálculo dos coeficientes de rigidez pelo método das forças, consideram-se os deslocamentos como recalques unitários nas extremidades. E para a solução dos momentos de engastamento perfeito, considera-se a atuação do carregamento externo. Trata-se, então, da resolução de uma barra hiperestática submetida à solicitação externa e recalques nos apoios.

Considerando a barra apresentada na Figura 3a, deseja-se conhecer os momentos atuantes nos engastes devido recalque angular unitário aplicado na extremidade (1). Pela aplicação do método das forças, devem ser eliminados três vínculos excedentes para transformar a estrutura hiperestática original em isostática. Como se deseja conhecer os momentos nos engastes, o SP escolhido será tal que elimine os dois engastes e uma terceira vinculação, arbitrária, que resulte numa estrutura estável estaticamente (Figura 3b). Dessa eliminação, as reações de apoio M_1 , M_2 e H_2 associadas a esses vínculos são as incógnitas da solução pelo método das forças, as quais são denominadas esforços hiperestáticos X_1 , X_2 e X_3 , respectivamente.

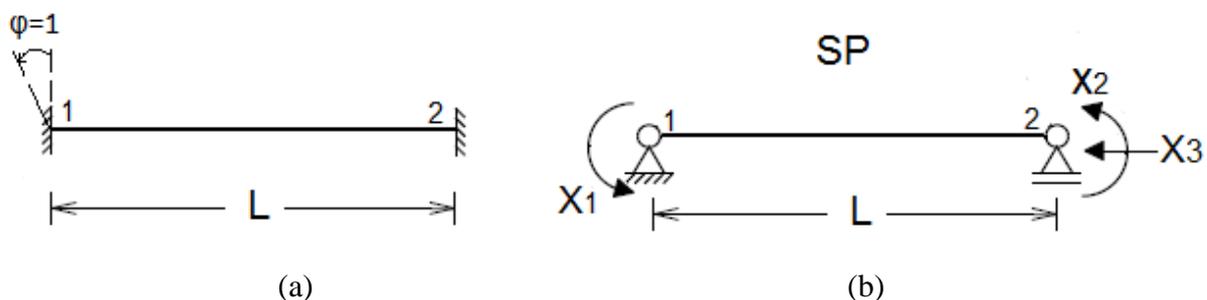


Figura 3: Representação da (a) barra biengastada com recalque unitário e (b) Sistema Principal adotado.

Fonte: Autores, 2018.

Adotado um valor unitário para os hiperestáticos, cada incógnita é isolada no SP para configuração dos casos básicos (0), (1), (2) e (3), conforme Figura 4. Em cada caso básico são determinados os deslocamentos (δ_{ij}) provocados pela incógnita em questão.

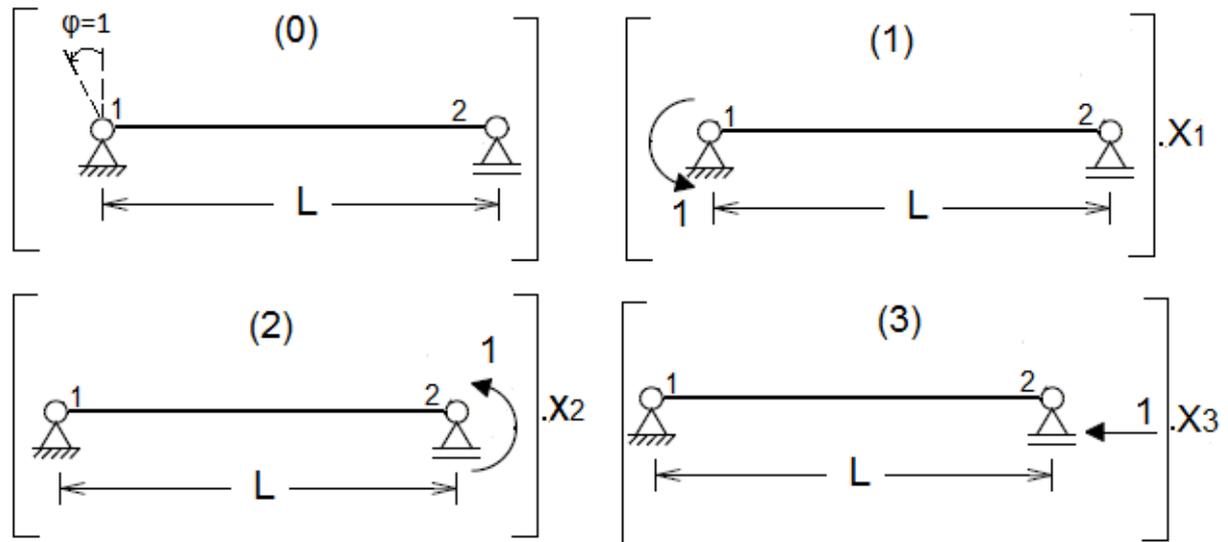


Figura 4: Casos básicos da barra biengastada com recalque na extremidade inicial.
Fonte: Autores, 2018.

Como a parcela de energia de deformação pelos efeitos axiais e de cisalhamento serão desprezadas no cálculo dos coeficientes de flexibilidade e termos de carga, os deslocamentos serão determinados pela simplificação da Equação (1.2), considerando unitária a carga virtual:

$$\delta_{ij} = \int_L \frac{M \cdot \bar{M}}{E \cdot I} dx \quad (1.3)$$

Desse modo, faz-se necessário a dedução das equações do momento fletor (M_i) para cada caso básico. Considerando a origem das abscissas na extremidade esquerda da barra, as equações são:

Caso (1) – Hiperestático $X_1=1$ isolada no SP

$$M_1(x) = -1 + \frac{x}{L} \quad (1.4)$$

Caso (2) – Hiperestático $X_2=1$ isolada no SP

$$M_2(x) = \frac{x}{L} \quad (1.5)$$

Caso (3) – Hiperestático $X_3=1$ isolada no SP

$$M_3(x) = 0 \tag{1.6}$$

Caso (0) – Solicitação externa (recalque) isolado no SP

Quando a solicitação externa é dada por recalques de apoio, o termo de carga é calculado por (MARTHA, 2010):

$$\delta_{ir} = - \sum_{\text{recalques}} R_i \cdot \rho_i \tag{1.7}$$

sendo:

R_i = reação de apoio correspondente ao recalque no caso básico (i); e

ρ_i = recalque do apoio.

O único caso básico em que há reação na direção e no ponto de aplicação do recalque é o caso (1), cuja reação é a própria incógnita $X_1=1$. Sendo unitário o recalque, tem-se $\delta_{1r}=-1$, $\delta_{2r}=0$ e $\delta_{3r}=0$.

Considerando-se que a mísula tenha comprimento a em relação ao vão L , e o restante da barra com inércia constante, o coeficiente de flexibilidade δ_{ij} é determinado por:

$$\delta_{ij} = \int_0^a \frac{M_i(x) \cdot M_j(x)}{E \cdot I_z(x)} dx + \int_a^L \frac{M_i(x) \cdot M_j(x)}{E \cdot I_{z_{\min}}} dx \tag{1.8}$$

Pelo princípio da superposição de efeitos dos casos básicos, obtemos o seguinte sistema de equações de compatibilidade do sistema principal adotado na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{1.9}$$

Por ser nula a equação do momento fletor no caso (3), os coeficientes δ_{13} , δ_{23} , δ_{31} , δ_{32} e δ_{33} são também nulos. Sendo assim, a matriz de flexibilidade pode ser tratada como matriz de ordem dois, uma vez que já se pode antecipar o valor da terceira incógnita ($X_3=0$):

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{1.10}$$

A resolução da equação matricial fornece os hiperestáticos X_1 e X_2 . Para o método dos deslocamentos, o hiperestático X_1 é o coeficiente de rigidez à rotação a_1 . Sabendo-se que o momento atuante na extremidade (2) é dado por X_2 , tem-se $b_2=X_2$. Conhecido os momentos atuantes nos engastes, a obtenção do coeficiente de transmissão t_{12} é imediata:

$$b_2 = a_1.t_{12}$$

$$t_{12} = \frac{b_2}{a_1} \tag{1.11}$$

Observa-se que a classificação do coeficiente de transmissão como parâmetro fundamental é contraditória. Segundo Martha (2010), todos os demais coeficientes de rigidez locais podem ser deduzidos em função do parâmetro fundamental. Não é o que ocorre no caso do coeficiente de transmissão, uma vez que se faz necessário determinar os coeficientes de rigidez a_1 e b_2 para obtenção de t_{12} .

Para dedução dos demais coeficientes de rigidez à flexão, basta recalculer os termos do vetor de cargas pela Equação (1.7), de acordo com o deslocamento prescrito. Por exemplo, para o cálculo do coeficiente de rigidez transversal devido deslocamento ortogonal recíproco na extremidade (2) da mesma barra, os termos do vetor de cargas são $\delta_{1r} = \frac{-1}{L}$, $\delta_{2r} = \frac{-1}{L}$ e $\delta_{3r} = 0$. A matriz de flexibilidade permanece válida para qualquer outra solicitação externa enquanto o SP não for alterado.

No caso dos momentos de engastamento perfeito devido carregamentos externos, a dedução é feita aplicando-se a mesma matriz de flexibilidade, uma vez que as incógnitas X_1 e X_2 do SP são os momentos nos engastes os quais se quer conhecer. No entanto, os termos do vetor de cargas devem ser calculados pela Equação (1.8), pois não se trata de solicitação por recalque, mas devido carga externa. Sendo assim, deve-se deduzir a equação do momento fletor devido o carregamento atuante. No caso particular de solicitação por variação de temperatura na peça, o termo de carga é calculado pela seguinte equação do PTV:

$$\delta_{it} = \int_L \frac{\bar{M}.\alpha(Ti - Te)}{H} dx + \int_L \bar{N}.\alpha.Tg.dx \tag{1.12}$$

sendo:

α = coeficiente de dilatação térmica do material;

T_i = temperatura interna da peça;

T_e = temperatura externa da peça;

H = altura da seção transversal;

T_g = variação de temperatura no centro de gravidade da peça.

O efeito da força normal não deve ser desprezado no caso de variações térmicas. Considerando-se então a força normal para o SP da Figura 4, os casos básicos (1) e (2) apresentam força normal nula. Como consequência, os coeficientes δ_{13} , δ_{23} , δ_{32} e δ_{31} são também nulos, com exceção de δ_{33} que, diferente do caso anterior, será não nulo. Disso, resulta-se que o valor da terceira incógnita é dado por $X_3 = -\frac{\delta_{3t}}{\delta_{33}}$, não havendo influência no cálculo das demais incógnitas. Como o foco deste trabalho é o cálculo dos parâmetros fundamentais devido solicitações transversais, nos interessa conhecer os momentos de engastamento perfeito. Sendo assim, pode-se aplicar a formulação matricial apresentada na Equação (1.10) e desprezar o segundo termo da Equação (1.12), sem prejuízo no cálculo das incógnitas X_1 e X_2 . Os termos de carga para o caso de variação de temperatura são então calculados por:

$$\delta_{it} = \int_L \frac{\bar{M} \cdot \alpha (T_i - T_e)}{H} dx \quad (1.13)$$

Em relação às barras com uma extremidade engastada e outra articulada, o roteiro de cálculo é o mesmo apresentado nessa seção, com alteração do SP, uma vez que a barra teria duas incógnitas hiperestáticas. Considerando a barra do exemplo anterior com a extremidade final articulada, deseja-se conhecer o momento atuante na extremidade engastada. Desse modo, X_1 é uma das incógnitas e arbitra-se novamente X_3 como a segunda incógnita, resultando numa matriz de flexibilidade de ordem dois. Considerando-se que o momento fletor causado por X_3 é nulo e as simplificações feitas anteriormente para o caso de variação de temperatura, a única incógnita a ser determinada é X_1 :

$$[\delta_{ij}] \{X_1\} = -\{\delta_{i0}\} \quad (1.14)$$

Vale ressaltar que a escolha de outro SP levaria aos mesmos resultados, se forem consideradas as simplificações feitas nesse roteiro. Ao contrário do método dos deslocamentos, no método das forças existem vários possíveis sistemas principais para uma

estrutura, ficando o usuário livre para escolher quais incógnitas hiperestáticas adotar, desde que resulte num SP estável estaticamente.

Lei de variação da inércia

Neste trabalho, bem como no programa desenvolvido, serão analisados mísulas com variação da altura linear e parabólica, simétricas ou não, que, segundo Süssekind (1993) são os casos mais usuais para pontes com inércia variável. A Figura 5 indica as leis de variação da altura que serão abordados.

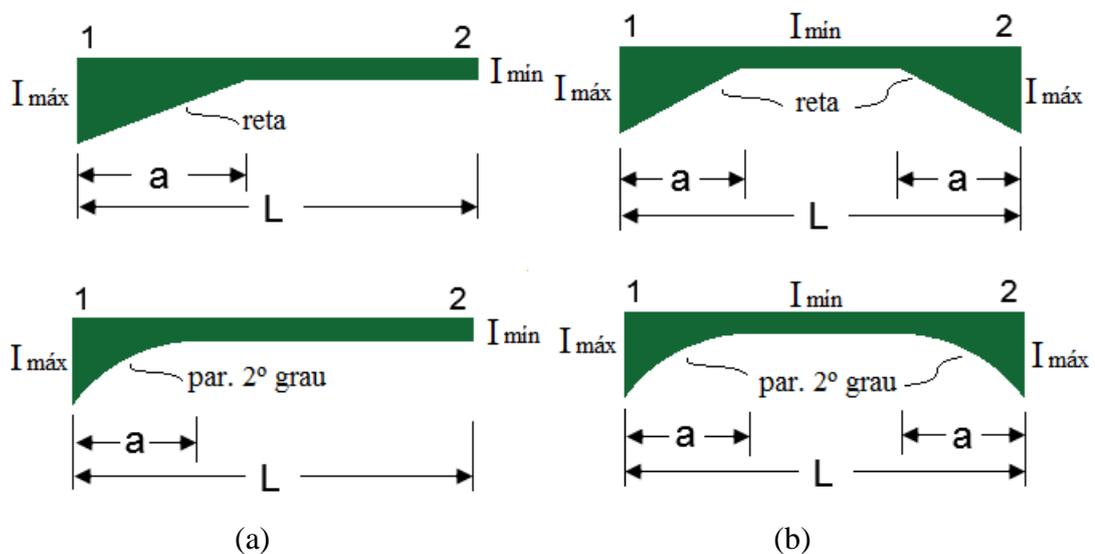


Figura 5: Mísulas (a) assimétricas e (b) simétricas.
Fonte: Autores, 2018.

Conforme apresentado na Figura 5, será estabelecido que em caso de mísula assimétrica, a maior inércia da barra ($I_{m\acute{a}x}$) estará sempre vinculada à extremidade esquerda.

A variação da inércia será determinada pela variação da altura (h) da seção, no caso de seção transversal retangular, mantendo constante a largura (b_w). Para o caso de Perfil I e Perfil T, apenas a altura (h) da alma será variável, mantendo-se constantes a espessura (t_w) da alma, a largura (b_w) e espessuras (e_1) e (e_2) das mesas. A Figura 6 ilustra as seções transversais consideradas, bem como a nomenclatura adotada para suas dimensões.

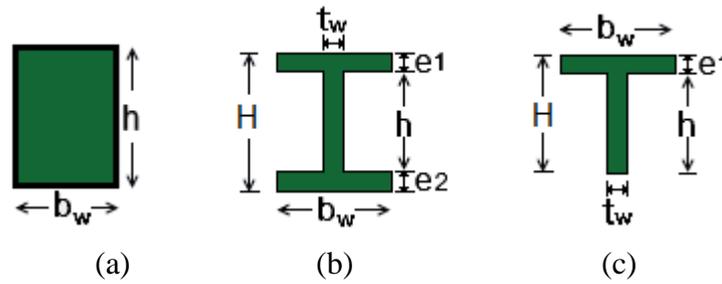


Figura 6: Seção transversal (a) retangular, (b) Perfil I e (c) Perfil T.
Fonte: Autores, 2018.

Vale ressaltar que, em caso de Perfil I, será considerada a possibilidade das mesas possuírem espessuras distintas. Além disso, caso a largura (b_w) da mesa for igual à altura total da seção (H), o perfil poderá ser denominado Perfil H.

A lei de variação da inércia será calculada em função da variação da altura, cuja equação será denominada $h(x)$, em que são conhecidos dois valores da altura da seção transversal indicadas pelo usuário: a altura máxima ($H_{\text{máx}}$) e mínima ($H_{\text{mín}}$).

Para as mísulas retas a variação da altura ocorre linearmente segundo uma equação do 1º grau. A Figura 7 ilustra uma mísula reta simétrica que apresenta os dois casos de variação linear da altura (decrecente e crescente), conduzindo a duas equações diferentes da altura.

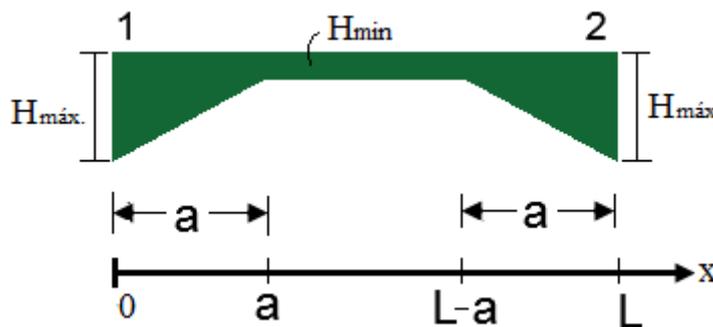


Figura 7: Mísula reta com altura decrescente e crescente com indicação das dimensões conhecidas.
Fonte: Autores, 2018.

Em relação à mísula decrescente que se inicia na extremidade (1), são conhecidos dois pontos que relacionam a abscissa (x) com a altura da mísula: os pontos $(0, H_{\text{máx}})$ e $(a, H_{\text{mín}})$. Por semelhança de triângulos, obtém-se a lei de variação da altura dessa mísula:

$$h(x) = H_{m\acute{a}x} - (H_{m\acute{a}x} - H_{m\acute{i}n}) \frac{x}{a} \quad (1.15)$$

Para a m\acute{is}ula crescente deve ser observado que a origem da mesma n\~{a}o coincide com a origem do eixo (x), mas com a abscissa (L-a). Portanto, a lei de varia\c{c}\~{a}o \acute{e} tal que $y(L-a) = 0$. Feita as devidas modifica\c{c}\~{o}es, obt\~{e}m-se:

$$h(x) = H_{m\acute{i}n} + \left(\frac{H_{m\acute{a}x} - H_{m\acute{i}n}}{a} \right) \cdot (x - (L - a)) \quad (1.16)$$

Em rela\c{c}\~{a}o \~{a}s m\acute{is}ulas parab\~{o}licas ser\~{a} estabelecido que o v\~{e}rtice da par\~{a}bola coincide com o ponto de menor in\~{e}rcia da barra. Assim, em caso de m\acute{is}ula com trecho parab\~{o}lico-retil\~{i}neo, o trecho retil\~{i}neo ser\~{a} sempre tangente \~{a} par\~{a}bola, conforme Figura 8. Esse modelo foi adotado para que os casos abordados sejam compat\~{i}veis com os casos originalmente divulgados por Guld\~{a}n (1956).

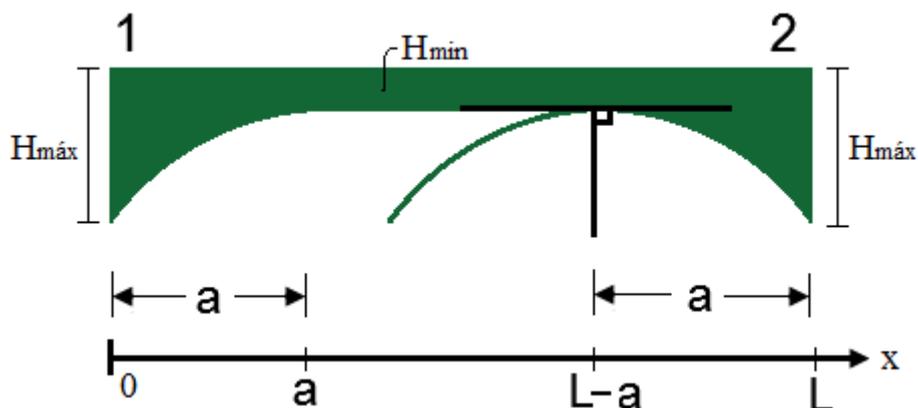


Figura 8: M\acute{is}ula parab\~{o}lica com indica\c{c}\~{a}o das dimens\~{o}es conhecidas e ponto de tang\~{e}ncia.
Fonte: Autores, 2018.

Desse modo, para determina\c{c}\~{a}o da equa\c{c}\~{a}o que rege a varia\c{c}\~{a}o da altura da m\acute{is}ula parab\~{o}lica, ser\~{a} pr\~{e}-estabelecido que os pontos de coordenadas (a, Hmin) e (L-a, Hmin) s\~{a}o os v\~{e}rtices da par\~{a}bola. Vale ressaltar que a m\acute{is}ula sim\~{e}trica \acute{e} formada por uma \acute{u}nica par\~{a}bola dividida exatamente no v\~{e}rtice pelo trecho retil\~{i}neo. Em caso de $L=2a$, a m\acute{is}ula apresenta uma par\~{a}bola cont\~{i}nua com v\~{e}rtice no centro da barra.

Para o primeiro trecho da par\~{a}bola, com origem na extremidade (1), s\~{a}o conhecidos os pontos de coordenadas (0, Hm\acute{a}x) e (a, Hmin). Sendo a fun\c{c}\~{a}o de 2\~{o} grau do tipo $h(x) = mx^2 + \eta x + c$, a substitui\c{c}\~{a}o do primeiro ponto resulta em $c = H_{m\acute{a}x}$. Para a determina\c{c}\~{a}o dos coeficientes (m) e (η), basta considerar as coordenadas do v\~{e}rtice no ponto (a, Hmin).

Desenvolvendo as equações e isolando os coeficientes, a equação da altura da mísula parabólica é dada por:

$$h(x) = \frac{(H_{máx} - H_{min})}{a^2} x^2 - \frac{2 \cdot (H_{máx} - H_{min})}{a} x + H_{máx} \quad (1.17)$$

Em caso de ser a mísula simétrica com trecho retilíneo, a Equação (1.17) deve ser corrigida para que atenda corretamente as alturas do segundo trecho em mísula, uma vez que o trecho reto provoca uma descontinuidade da parábola. Para isso, a partir de $x=(L-a)$, tem-se:

$$h(x) = \frac{(H_{máx} - H_{min})}{a^2} (x - (L - 2a))^2 - \frac{2 \cdot (H_{máx} - H_{min})}{a} (x - (L - 2a)) + H_{máx} \quad (1.18)$$

Conhecidas as leis de variação da altura para cada mísula, a lei de variação da inércia para uma seção retangular em relação ao eixo (z), que passa pelo CG da seção transversal é dada pela Equação (1.19), encontrada em qualquer livro texto da Mecânica.

$$I_z(x) = \frac{b_w h(x)^3}{12} \quad (1.19)$$

Em relação ao perfil I, a inércia (I_z) é calculada pelo método da somatória, em que se considera esse perfil como resultado da composição de duas seções retangulares. Considerando-se que as mesas podem ter espessuras diferentes entre si, o centroide não mais coincide com o eixo de simetria em (z), devendo-se calcular o CG do perfil I em relação ao eixo (y). O cálculo do centroide (y_c) é apresentado pela Equação (1.20) e o momento de inércia em (z) é obtida pela aplicação da Equação (1.19) e do Teorema dos Eixos Paralelos aos dois retângulos que compõem o Perfil I, resultando na Equação (1.21).

$$y_c(x) = \frac{\frac{b_w}{2} (h(x) + e1 + e2)^2 - \left(\frac{h(x)}{2} + e2\right) (b_w - t_w) \cdot h(x)}{b_w (h(x) + e1 + e2) - (b_w - t_w) h(x)} \quad (1.20)$$

$$I_z(x) = \left[\frac{b_w}{12} (h(x) + e1 + e2)^3 + b_w (h(x) + e1 + e2) \left(y_c(x) - \frac{h(x) + e1 + e2}{2} \right)^2 \right] -$$

$$\left[(b_w - t_w) \frac{h(x)^3}{12} + (b_w - t_w) h(x) \left(yc(x) - \frac{h(x)}{2} - e2 \right)^2 \right] \quad (1.21)$$

O momento de inércia (I_z) do Perfil T é calculado pela Equação (1.21), considerando-se nula a espessura de uma das mesas. Para facilitar o cálculo das integrais apresentadas nas equações (1.8) e (1.13), foi utilizado a integração numérica por quadratura gaussiana.

Integração numérica por quadratura gaussiana

A formulação aplicada neste trabalho é a quadratura de Gauss-Legendre. Esse método tem como objetivo fornecer resultados exatos para polinômios até a ordem $(2n-1)$, onde n é o número de pontos em que a função f será avaliada. Para isso, torna flexível o critério de Newton-Cotes de que os pontos de integração sejam igualmente espaçados e gera-se um polinômio interpolador utilizando pontos diferentes dos limites de integração.

As fórmulas de Newton-Cotes podem ser reescritas genericamente na forma (SPERANDIO et al., 2003):

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} A_i f(x_i) \quad (1.22)$$

sendo os pesos A_i e os pontos x_i não arbitrados pelo usuário, mas definidos por um critério rigoroso para atender a premissa da exatidão citada acima.

Para evitar a determinação de A_i e x_i em cada novo processo de integração, esses parâmetros foram padronizados para uma solução normalizada. Desse modo, o intervalo de integração desse ser alterado de $[a, b]$ para $[-1, 1]$ através da troca de variáveis x para t , conforme Equação (1.23).

$$x = \frac{(b-a)}{2} t + \frac{(b+a)}{2} \quad (1.23)$$

Consequentemente:

$$dx = \frac{(b-a)}{2} dt \quad (1.24)$$

Substituindo as expressões (1.23) e (1.24) na integral (1.22), a resolução pela quadratura de Gauss-Legendre será (GILAT e SUBRAMANIAM, 2008):

$$I = \int_{-1}^1 F(t)dt \approx \sum_{i=0}^{n-1} A_i F(t_i) \quad (1.25)$$

O usuário deve fixar o número n de pontos (inteiro e positivo), no qual a solução numérica da integral será exata se $f(x)$ for um polinômio de grau até a ordem $(2n-1)$. No programa desenvolvido foram utilizados 14 pontos de Gauss.

Para exemplificar a aplicação da quadratura gaussiana na implementação computacional, considere a viga em mísula reta assimétrica de seção retangular da Figura 9:

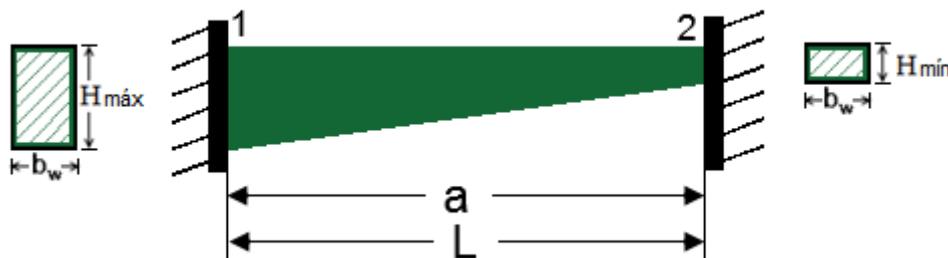


Figura 9: Mísula reta assimétrica de seção transversal retangular.
Fonte: Autores, 2018.

Considerando-se o mesmo SP adotado para o exemplo da Figura 3, o coeficiente de flexibilidade δ_{11} dessa viga é calculado pela aplicação da Equação (1.3), que resulta em:

$$\delta_{11} = \int_0^L \frac{\left(-1 + \frac{x}{L}\right)^2}{\frac{E}{12} \left[b_w \left(H_{máx} - (H_{máx} - H_{mín}) \frac{x}{a} \right)^3 \right]} dx \quad (1.26)$$

Utilizando-se a integração numérica de Gauss-Legendre, a Equação (1.26) é transformada na seguinte somatória:

$$\delta_{11} = \sum_{i=0}^{i=13} \frac{\left(-1 + \frac{t_i}{2} + \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{E}{12} \left[b_w \left(H_{máx} - (H_{máx} - H_{mín}) \frac{\left(\frac{L}{2}t_i + \frac{L}{2}\right)}{a} \right)^3 \right]} \cdot \left(\frac{L}{2}\right) \cdot A_i \quad (1.27)$$

Observa-se a facilidade como a integral pode ser resolvida por somatória, sendo necessário conhecer apenas os valores dos parâmetros t_i e A_i , disponíveis na literatura.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Com base na metodologia apresentada, desenvolveu-se em linguagem *Object Pascal*, por meio do ambiente de desenvolvimento integrado *Lazarus*, o programa MiSULA MATH para cálculo das soluções fundamentais em barras isoladas submetidas à flexão. Conforme a interface apresentada na Figura 10, o programa disponibiliza quatro ações externas, atuando simultaneamente ou não: carga distribuída (parcial ou em todo o vão da barra), carga concentrada, carga térmica e carga-momento. Em relação aos resultados, são determinadas as reações de engastamento perfeito, coeficientes de rigidez à flexão (fatores de forma), os coeficientes tabelados por Guldán (1956), e os diagramas de momento fletor e força cortante. O programa não estabelece, em sua interface, as unidades de medida dos dados de entrada, ficando a critério do usuário a escolha dessas unidades.

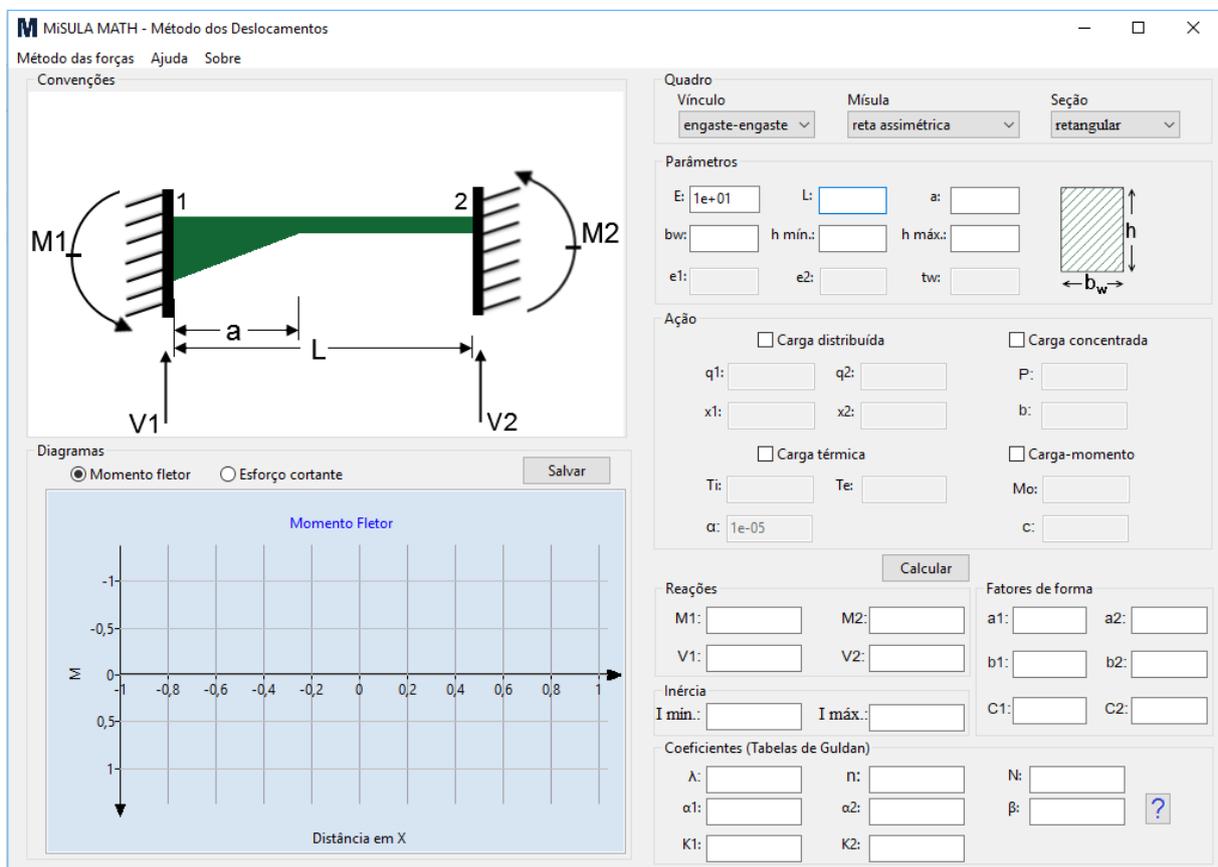


Figura 10: Interface do programa MiSULA MATH.
Fonte: Autores, 2018.

Os resultados obtidos por essa implementação são comparados com os resultados tabelados por Guldán (1956) e apresentados por Sússekínd (1991), Vilela et al. (2008) e pela

implementação feita em Software Matemático (SM), cujo resultado é exato, por resolver integrais analiticamente sem aplicação de métodos numéricos.

A Tabela 1 apresenta os coeficientes (α_1), (α_2) e (β) obtidos pelos autores citados e pelo MiSULA MATH, para uma viga com mísula reta ($\lambda=1$), seção transversal retangular, biengastada e relação n entre momento de inércia mínimo e máximo variando de 1,000 a 0,005. Os resultados consideram duas casas decimais, em consonância com os valores tabelados por Guldan.

Tabela 1: Coeficientes para cálculo dos parâmetros fundamentais de rigidez à rotação para vigas em mísula reta com seção transversal retangular ($I_{min}/I_{máx}$ variando de 1,000 a 0,005).

$I_{min}/I_{máx}$	1,000	0,900	0,800	0,700	0,600	0,500	0,400	0,300	0,200	0,150	
α_1	Guldan	4,00	4,30	4,74	5,23	5,88	6,74	7,99	9,94	13,55	16,90
	Vilela et al.	4,00	4,33	4,73	5,23	5,87	6,74	7,99	9,94	13,55	16,90
	MiSULA MATH	4,00	4,33	4,73	5,23	5,87	6,74	7,99	9,94	13,55	16,90
α_2	Guldan	4,00	4,08	4,24	4,38	4,55	4,77	5,05	5,44	6,05	6,54
	Vilela et al.	4,00	4,11	4,23	4,38	4,55	4,77	5,05	5,44	6,05	6,54
	MiSULA MATH	4,00	4,11	4,23	4,38	4,55	4,77	5,05	5,44	6,05	6,54
β	Guldan	2,00	2,08	2,25	2,39	2,58	2,83	3,17	3,67	4,51	5,22
	Vilela et al.	2,00	2,11	2,24	2,39	2,58	2,83	3,17	3,67	4,50	5,22
	MiSULA MATH	2,00	2,11	2,24	2,39	2,58	2,83	3,17	3,67	4,50	5,22

Continuação Tabela 1.

$I_{min}/I_{máx}$	0,120	0,100	0,080	0,060	0,050	0,040	0,030	0,020	0,010	0,005	
α_1	Guldan	20,07	23,11	27,43	34,37	39,63	47,20	59,17	81,51	141,57	247,26
	Vilela et al.	20,07	23,11	27,48	34,37	39,63	47,19	59,17	81,51	141,57	247,26
	MiSULA MATH	20,07	23,11	27,48	34,37	39,63	47,19	59,17	81,51	141,57	247,26
α_2	Guldan	6,94	7,29	7,68	8,38	8,81	9,37	10,15	11,37	13,85	16,93
	Vilela et al.	6,94	7,29	7,74	8,38	8,81	9,37	10,15	11,37	13,85	16,93
	MiSULA MATH	6,94	7,29	7,74	8,38	8,81	9,37	10,15	11,37	13,85	16,93
β	Guldan	5,82	6,42	7,14	8,35	9,17	10,29	11,95	14,76	21,22	30,59
	Vilela et al.	5,85	6,42	7,20	8,35	9,17	10,29	11,95	14,76	21,22	30,59
	MiSULA MATH	5,85	6,42	7,20	8,35	9,17	10,29	11,95	14,76	21,22	30,59

Fonte: Autores, 2018.

Da comparação dos dados da Tabela 1 observa-se que houve variação pequena dos resultados em relação aos atribuídos à Guldan. Em relação aos resultados de Vilela et al. (2008), que utilizou o método da analogia das vigas conjugadas e integração de Gauss para cálculo desses coeficientes, não houve divergência em nenhum dos valores apresentados.

A seguir, são apresentados os resultados obtidos para os coeficientes (K1) e (K2) aplicados no cálculo das reações de engastamento perfeito. Para obtenção desses resultados

considerou-se uma viga de extremidades engastadas e características semelhantes ao modelo da Figura 11: viga com mísula parabólica seguida por trecho retilíneo ($\lambda=0,45$), assimétrica, de seção transversal retangular, submetida à carga uniformemente distribuída (q).

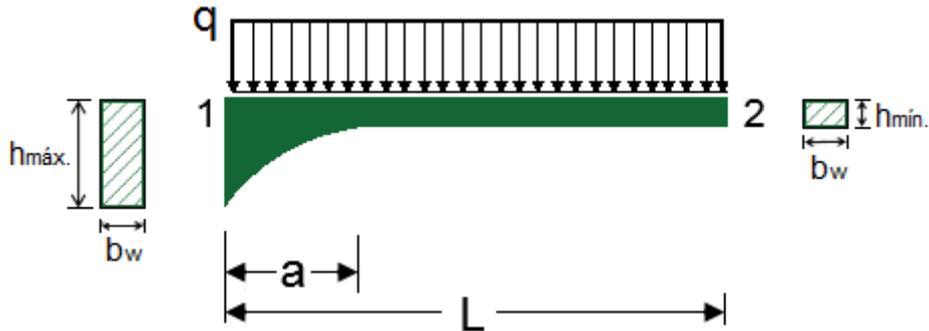


Figura 11: Modelo de viga em mísula parabólico-retilínea carregada uniformemente.
Fonte: Autores, 2018.

A Tabela 2 compara os valores de (K1) e (K2) obtidos por Guldan, pelo Software Matemático (SM) e pelo MiSULA MATH, para $I_{min}/I_{máx}$ variando entre 1,000 a 0,150.

Tabela 2: Coeficientes para cálculo dos momentos de engastamento perfeito para barra em mísula parabólico-retilínea submetida à carga uniformemente distribuída ($I_{min}/I_{máx}$ variando de 1,000 a 0,150).

I_{min}/I_{max}	1,000	0,900	0,800	0,700	0,600	0,500	0,400	0,300	0,200	0,150	
K1	Guldan	1,000	1,027	1,057	1,091	1,131	1,179	1,239	1,316	1,425	1,501
	SM	1,000	1,027	1,057	1,091	1,131	1,179	1,239	1,316	1,425	1,501
	MiSULA MATH	1,000	1,027	1,057	1,091	1,131	1,179	1,239	1,316	1,425	1,501
K2	Guldan	1,000	0,988	0,974	0,958	0,940	0,919	0,893	0,860	0,815	0,784
	SM	1,000	0,988	0,974	0,958	0,940	0,919	0,893	0,860	0,815	0,784
	MiSULA MATH	1,000	0,988	0,974	0,958	0,940	0,919	0,893	0,860	0,815	0,784

Fonte: Autores, 2018.

Observa-se que não houve variação em nenhum dos resultados da Tabela 2, para as três casas decimais consideradas, em consonância com os resultados de Guldan. Tal constatação indica uma convergência exata da metodologia utilizada para o número de casas decimais considerado. Vale também ressaltar a vantagem que os programas computacionais apresentam ao calcular os coeficientes (α_1), (α_2), (β), (K1) e (K2) para quaisquer valores das relações $I_{min}/I_{máx}$ e a/L , e não somente para argumentos de entrada pré-estabelecidos, como ocorrem na tabelas de Guldan.

Na Tabela 3 são apresentados os momentos de engastamento perfeito para uma viga em mísula parabólica simétrica, biengastada, de seção transversal retangular, com módulo de elasticidade longitudinal $E=1.10^4$ N/m², $b_w=0,12$ m, $h_{mín}=0,30$ m e $h_{máx}$ variando de modo a

se obter $I_{min}/I_{máx}$ entre 0,100 e 0,150. A viga é solicitada por carregamento trapezoidal e variação de temperatura ($T_i = 28\text{ }^\circ\text{C}$, $T_e = -15\text{ }^\circ\text{C}$, $\alpha = 5 \cdot 10^{-5}$), conforme ilustra a Figura 12.

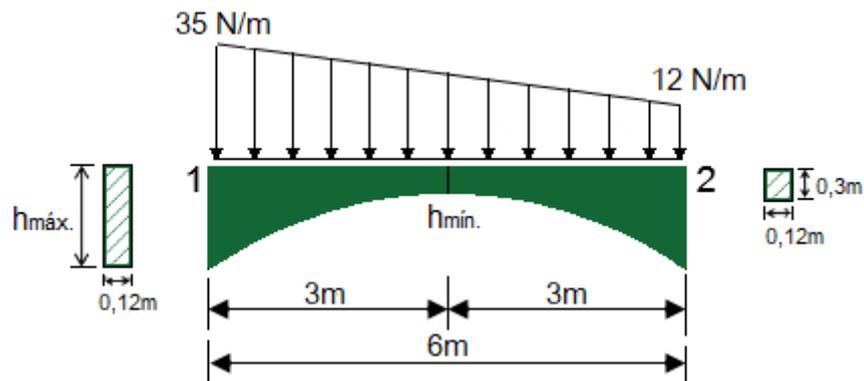


Figura 12: Viga parabólica simétrica solicitada por carregamento distribuído e variação de temperatura.
Fonte: Autores, 2018.

A comparação feita na Tabela 3 não inclui a metodologia de Guldan, uma vez que os coeficientes para mísulas submetidas à carregamento trapezoidal e variação de temperatura não foram divulgados por Sússekind (1991). Desse modo, são comparados os valores obtidos pelo programa implementado por Vilela et al. (2008), o software matemático (SM) e pelo MiSULA MATH.

Tabela 3: Momentos de engastamento perfeito para viga em mísula parabólica com seção retangular submetida à carregamento trapezoidal e variação de temperatura ($I_{min}/I_{máx}$ variando de 1,000 a 0,150).

$I_{min}/I_{máx}$	1,000	0,900	0,800	0,700	0,600	0,500	0,400	0,300	0,200	0,150	
M1	Vilela et al.	77,42	78,53	79,75	81,11	82,65	84,42	86,52	89,11	92,53	94,78
	SM	77,42	78,53	79,75	81,11	82,65	84,42	86,52	89,11	92,53	94,78
	MiSULA MATH	77,42	78,53	79,75	81,11	82,65	84,42	86,52	89,11	92,53	94,78
M2	Vilela et al.	-63,62	-64,48	-65,42	-66,46	-67,63	-68,96	-70,52	-72,40	-74,82	-76,37
	SM	-63,62	-64,48	-65,42	-66,46	-67,63	-68,96	-70,52	-72,40	-74,82	-76,37
	MiSULA MATH	-63,62	-64,48	-65,42	-66,46	-67,63	-68,96	-70,52	-72,40	-74,82	-76,37

M1: reação momento na extremidade inicial; M2: reação momento na extremidade final. Fonte: Autores, 2018.

De acordo com esses resultados, não houve erro em nenhuma das reações de engastamento perfeito calculado por ambos os programas.

Para atestar a eficiência de convergência do método de integração por quadratura gaussiana utilizada na implementação do MiSULA MATH, a Tabela 4 apresenta as reações nos apoios de uma viga com engaste na extremidade (1) e apoio articulado na extremidade (2), considerando-se os resultados com seis casas decimais. A viga, com mísula reta simétrica

e seção transversal em Perfil I, é solicitada por uma carga triangular parcialmente distribuída em seu vão, ilustrada na Figura 13.

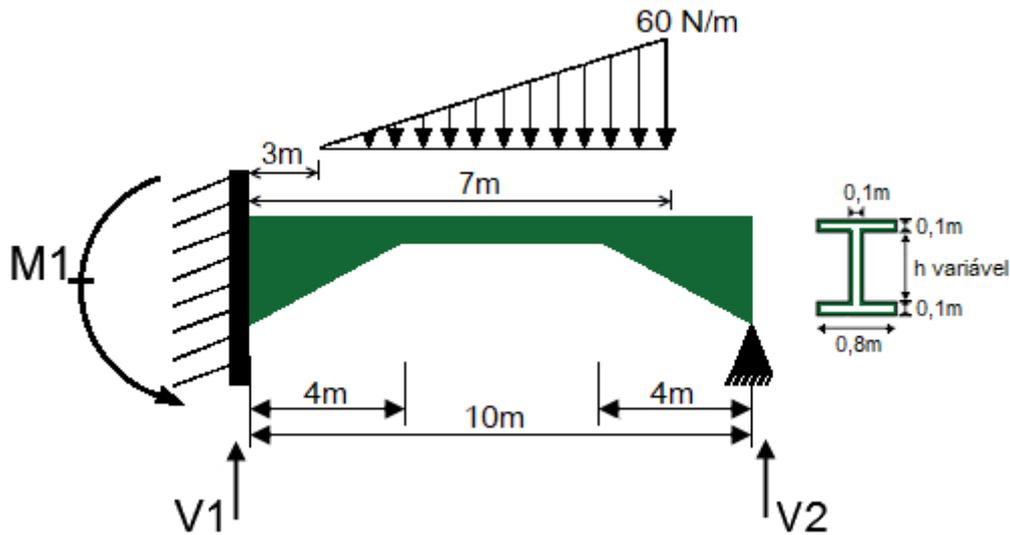


Figura 13: Viga com engaste-apoio em mísula reta simétrica (perfil I) submetida à carga triangular.
Fonte: Autores, 2018.

Adotou-se, para a viga da Figura 13, módulo de elasticidade longitudinal $E=100 \text{ N/m}^2$, $b_w=0,8 \text{ m}$, $t_w=0,1 \text{ m}$, $e_1=e_2=0,1 \text{ m}$, $h_{\text{máx}}=2 \text{ m}$ e $h_{\text{mín}}$ variando de modo a se obter $I_{\text{min}}/I_{\text{máx}}$ entre 0,100 e 0,500.

Tabela 4: Reações nos vínculos da viga em mísula reta simétrica com seção transversal em Perfil I submetida à carregamento triangular parcialmente distribuído ($I_{\text{min}}/I_{\text{máx}}$ variando de 1,000 a 0,500).

$I_{\text{min}}/I_{\text{máx}}$		1,000	0,900	0,800	0,700	0,600	0,500
M1	SM	203,960000	209,489769	215,737526	222,891236	231,242226	241,206181
	MiSULA MATH	203,960000	209,489769	215,737526	222,891236	231,242226	241,206181
V1	SM	72,396000	72,948977	73,573753	74,289124	75,124223	76,120618
	MiSULA MATH	72,396000	72,948977	73,573753	74,289124	75,124223	76,120618
V2	SM	47,604000	47,051023	46,426247	45,710876	44,875777	43,879382
	MiSULA MATH	47,604000	47,051023	46,426247	45,710876	44,875777	43,879382

Fonte: Autores, 2018.

Observa-se nesta última tabela que, considerando-se seis casas decimais, o método da quadratura gaussiana fornece resultados exatos de acordo com o cálculo realizado por integração direta no software matemático, o que confirma a eficiência da metodologia aplicada.

CONCLUSÕES

A partir das comparações feitas, pode-se concluir que o método das forças associado à resolução de integrais por quadratura gaussiana é uma metodologia eficiente para o cálculo

das soluções fundamentais de barras submetidas à flexão, uma vez que o grau de convergência dos resultados é exato quando comparado ao cálculo feito por software matemático.

Além da eficiência dessa metodologia, deve-se ressaltar a simplicidade de implementação computacional, à medida que as solicitações externas podem ser facilmente implementadas devido a versatilidade do método das forças. Em decorrência disso, o programa desenvolvido apresenta a possibilidade de análise de barras isoladas em mísula submetidas à carregamentos transversais tampouco disponíveis em tabelas e na literatura de análise estrutural. Consequentemente, a substituição do uso de tabelas para cálculo dos esforços em estruturas com mísulas, desobrigando o usuário a realizar interpolações para adequação dos argumentos de entrada nessas tabelas, demonstram a relevância do programa para o aperfeiçoamento dos resultados.

Sugere-se, para trabalhos futuros, que a implementação seja expandida para o caso de barras sujeitas a outras solicitações externas e variações do momento de inércia.

REFERÊNCIAS

- GILAT, A.; SUBRAMANIAM, V. **Métodos numéricos para engenheiros e cientistas**. Porto Alegre: Bookman, 2008.
- GULDAN, R. **Estructuras aporricadas y vigas continuas**. Buenos Aires. El Ateneo, 1956.
- MARTHA, L. F. **Análise de Estruturas: Conceitos e Métodos Básicos**. Editora Elsevier, Rio de Janeiro, 2010.
- SORIANO, H. L. e LIMA, S. S. **Análise de Estruturas – Método das Forças e Método dos Deslocamentos**. 2ª ed., Editora Ciência Moderna LTDA, Rio de Janeiro, 2006.
- SPERANDIO, D.; MENDES, J. T.; SILVA, L. H. M. **Cálculo Numérico – Características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos**. Editora Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2003.
- SÜSSEKIND, J. C. **Curso de Análise Estrutural – v. 3: Método das deformações**. Processo de Cross. Editora Globo, 8 ed., São Paulo, 1991.
- SÜSSEKIND, J. C. **Curso de Análise Estrutural – v.2: Deformações em estruturas. Método das forças**. Editora Globo, 10 ed., São Paulo, 1993.
- VILELA, P. C. S.; MARTHA, L. F. **Soluções Fundamentais para barras em mísula segundo a analogia da viga conjugada**. 2008, XXIX CILAMCE, Maceió, Brasil.