CÁLCULO DE DESLOCAMENTOS EM ESTRUTURAS ISOSTÁTICAS DE BARRAS COM MOMENTO DE INÉRCIA VARIÁVEL UTILIZANDO-SE A QUADRATURA DE GAUSS

CÁLCULO DE DESPLAZAMIENTOS EN ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS DE BARRAS CON MOMENTO DE INERCIA VARIABLE UTILIZANDOSE LA CUADRATURA DE GAUSS

EDSON TEJERINA CALDERÓN
Doutor em Engenharia Civil e Professor da Universidade Estadual de Goiás, Câmpus Anápolis de Ciências Exatas e Tecnológicas (Anápolis – GO)
edtejerin@uol.com.br

Resumo: A variação da seção transversal de uma barra ao longo do seu comprimento, pode ser em relação a sua altura ou na sua espessura ou ainda, nas suas duas direções, nesses casos, a área e o momento de inércia da seção transversal se tornam variáveis, fazendo com que aumente a dificuldade de cálculo, do ponto de vista matemático, já que envolve o cálculo de integrais cuja resolução algébrica se torna bastante trabalhosa ou simplesmente não existe, sendo necessária a adoção de uma função substituta ou um modelo substituto. Existem três classes de métodos para análise: a) Métodos de integração direta, b) Métodos utilizando analogias e c) Métodos utilizando a Energia de Deformação. Neste trabalho são apresentados os métodos que utilizam a Energia de Deformação, posteriormente é escolhido aquele que se torna mais adequado para aplicar as técnicas de integração numérica. Nos exemplos apresentados, são calculados deslocamentos de estruturas isostáticas utilizando-se técnicas comuns de integração numérica, sendo necessário, nestes casos, a divisão da estrutura em várias partes iguais, para facilitar os cálculos, logo esses deslocamentos são comparados com os resultados obtidos pela Quadratura de Gauss e pela integração algébrica. As seções são consideradas retangulares com variação linear ou parabólica da altura, mantendo-se a espessura constante.
Palavras-Chave: Deslocamento. Integração numérica. Quadratura de Gauss.

Resumen: La variación de la sección transversal de una barra a lo largo de su longitud, puede ser en relación a su altura o a su espesura o aun, en sus dos direcciones, en esos casos, el área y el momento de inercia de la sección transversal se tornan variables, haciendo con que aumente la dificuldad de cálculo, del punto de vista matemático, ya que envuelve el cálculo de integrales cuya resolución algebraica se torna bastante trabajosa o simplemente no existe, sendo necesaria la adopción de una función substituta o un modelo substituto. Existen tres clases de métodos para análisis: a) Métodos de integración directa, b) Métodos utilizando analogias y c) Métodos utilizando la Energia de Deformación. En este trabajo son presentados los métodos que utilizam la Energia de Deformación, posteriormente es escojido aquel que se torna mais adecuado para aplicar las técnicas de integración numérica. En los ejemplos presentados, son calculados desplazamientos de estruturas isostáticas utilizando-se técnicas comunes de integración numérica, siendo necesario, en estes casos, la división de la estructura en varias partes iguales, para facilitar los cálculos, luego esos desplazamientos son comparados con los resultados obtenidos por la Cuadratura de Gauss y por la integración algebraica. Las secciones son consideradas rectangulares con variación lineal o parabólica de la altura, manteniendose la espesura constante.
Palabras-clave: Desplazamiento. Integración numérica. Cuadratura de Gauss

1 - Introdução

No dimensionamento de uma estrutura é necessário conhecer os esforços internos (força normal, força cortante, momento de torção e momento fletor) que atuam ao longo dos eixos dos elementos que compõem a estrutura, mas, também é necessário conhecer os deslocamentos (rotações e translações) que acorrem ao longo desses eixos, já que esses deslocamentos poderão ultrapassar os valores admissíveis fornecidos pelas normas correspondentes aos materiais (aço, concreto, madeira) com os quais está feita a estrutura. Sendo necessário realizar um novo dimensionamento da estrutura, de forma que não ultrapassem os deslocamentos admissíveis.

Existem vários métodos para calcular deslocamentos em estruturas, que podem ser classificados em três tipos:

a) Métodos de integração direta;

b) Métodos utilizando analogias;

c) Métodos utilizando a energia de deformação.

Utilizando-se o Método da Energia de Deformação, os deslocamentos em uma estrutura podem ser calculados pelo 2º Teorema de Castigliano (TIMOSHENKO; GERE, 1994) e o Princípio dos Trabalhos Virtuais ou Teorema das Forças Virtuais (Soriano e Lima, 2004)

O 2º Teorema de Castigliano estabelece que a derivada parcial da energia de deformação U, em relação a qualquer força externa aplicada P_i, fornece o deslocamento δ_i sob o ponto de aplicação da força e na direção da mesma, isto é:

$$\delta_i = \frac{\partial U}{dP_i}$$

(1)

No caso de vigas e pórticos, realizando-se algumas simplificações, a energia de deformação pode ser escrita como:

$$U = \int_L \frac{M^2}{2EI} ds$$

(2)

Desta forma, a equação (1) fica:

$$\delta_i = \int_L \frac{M}{2EI} \frac{\partial M}{\partial P_i} ds$$

(3)

O Princípio dos Trabalhos Virtuais para a um corpo elástico que atingiu sua configuração de equilíbrio (SUSSEKIND, 1983), o trabalho virtual total das forças externas que sobre ele atuam é igual ao trabalho virtual das forças internas (esforços solicitantes) nele atuantes, para todos os deslocamentos virtuais arbitrários (compatíveis com os vínculos do corpo) que lhe sejam impostos, isto é:

$$W_{ext} = W_{\text{int}}$$

(4)

O trabalho virtual das forças externas W_{ext} é dado por:

$$W_{ext} = \overline{P}\delta$$

(5)

onde $\overline{P}$ é uma carga virtual aplicada na direção do deslocamento procurado.

O trabalho virtual das forças internas W_{int} é dado por:

$$W_{\text{int}} = \int_L \frac{\overline{M}M}{EI}ds + \int_L \frac{\overline{N}N}{EA}ds + \int_L \frac{\eta\overline{Q}Q}{GA}ds$$

(6)

Substituindo-se as equações (5) e (6) na equação (4), tem-se:

$$\overline{P}\delta = \int_L \frac{\overline{M}M}{EI}ds + \int_L \frac{\overline{N}N}{EA}ds + \int_L \frac{\eta\overline{Q}Q}{GA}ds$$

(7)

sendo:

E - módulo de elasticidade lomgitudinal

I - momento de inércia da área da seção transversal

A - área da seção transversal

G – módulo de elasticidade transversal

η - coeficiente de forma

M, N e Q - esforços solicitantes da carga externa real

$\overline{M}$, $\overline{N}$ e $\overline{Q}$ - esforços solicitantes da carga virtual $\overline{P}$

No caso de vigas e pórticos, pode se considerar apenas os efeitos devido ao momento fletor, desta forma a equação (7), fica:

$$\overline{\mathrm{P}}\delta = \int_{\mathrm{L}} \frac{\overline{\mathrm{M}}\mathrm{M}}{\mathrm{EI}}\mathrm{ds}$$

(8)

Quando se considerada que a seção transversal de uma barra é constante, significa que a área da seção transversal A e o momento de inércia I são também constantes, não havendo influência no cálculo das integrais.

Multiplicando-se ambos os membros da equação (8) por EI_c, tem-se:

$$EI_c \bar{P}\delta = \frac{I_c}{I} \int_L \bar{M} M ds \tag{9}$$

Se a seção transversal de uma barra variar ao longo do seu comprimento, seja na sua altura ou na sua espessura ou nas duas direções, nesse caso, a área da seção transversal e seu momento de inércia se tornam variáveis, isto é:

$$EI_c \bar{P}\delta = I_c \int_L \frac{\bar{M} M}{I} ds \tag{10}$$

Essa variação da inércia faz com que seu cálculo se torne laborioso e aumente a dificuldade, do ponto de vista matemático, já que envolve o cálculo de integrais que nem sempre têm soluções analíticas exatas, sendo necessário então, recorrer a métodos de integração numérica.

Em termos práticos, são utilizadas barras retas dotadas de uma mísula com variação linear ou parabólica em uma das suas extremidades, ou com duas mísulas simétricas nas suas extremidades (Rocha, A. M., 1973), como se indicam nas figuras 1 e 2.

Para o tipo de mísulas indicadas nas figuras 1 e 2 são utilizadas as tabelas de GULDAN, R. (1956), que facilitam a determinação da integral da equação (10).

Outros autores como ROCHA, A. M. (1973), POLILLO, A. (1982) e SÜSSEKIND, J. C. (1983), trazem em suas obras tabelas próprias e outras reproduzidas.

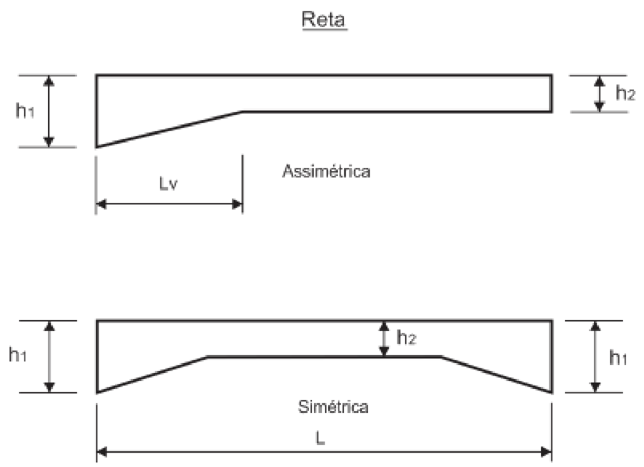

Figura 1- Tipos de mísulas com variação linear

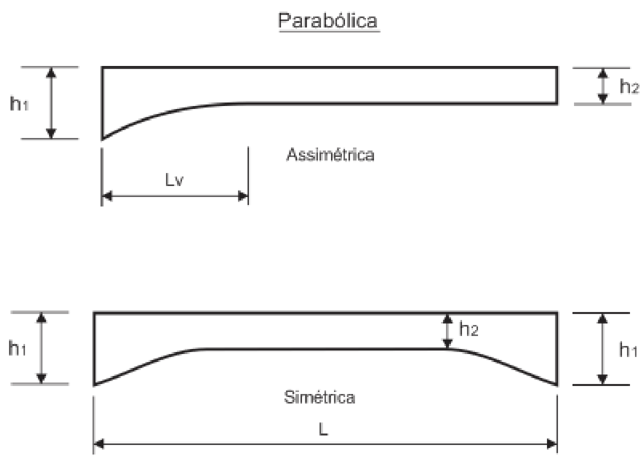

Figura 2- Tipos de mísulas com variação parabólica

2 – Objetivos

Calcular deslocamentos em estruturas de barras de inércia variável utilizando técnicas de integração numérica com ênfase na quadratura de Gauss.

3 - Metodologia

Quando a integração algébrica não é possível ou se torna bastante trabalhosa, o cálculo pode ser feito numericamente por médio de fórmulas que expressam a integral como uma combinação linear de um grupo selecionado de integrandos, para isso:

a) Divide-se o segmento L em um número arbitrário de intervalos (iguais ou desiguais).
b) Determina-se o valor numérico dos integrandos para cada intervalo.
c) Calcula-se a área correspondente de cada intervalo por médio da fórmula de integração escolhida.
d) Soma-se os valores das áreas elementares.

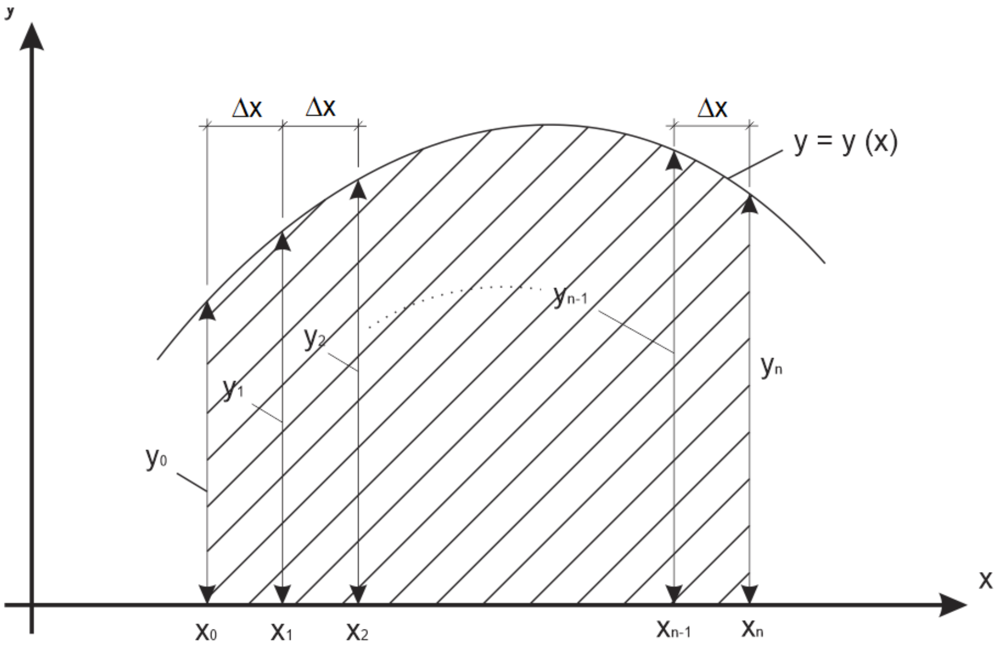

Figura 3 – Integração numérica

Algumas das fórmulas mais comuns são as seguintes (BARROSO et al., 1987):

Fórmula dos trapézios (Δx=L/m)

$$\int_{x_0}^{x_n} y(x)dx \cong \left(\frac{\Delta x}{2}\right)(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \ldots \ldots + 2y_{m-3} + 2y_{m-2} + 2y_{m-1} + y_m) \quad (11)$$

Fórmula de Simpson (Δx=L/2m)

$$\int_{x_0}^{x_n} y(x)dx \cong \left(\frac{\Delta x}{3}\right)(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots \ldots + 4y_{2m-3} + 2y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}) \quad (12)$$

Fórmula de Simpson (Δx=L/3m)

$$\int_{x_0}^{x_n} y(x)dx \cong \left(\frac{3\Delta x}{8}\right)(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + \cdots \ldots + 2y_{3m-3} + 3y_{3m-2} + 3y_{3m-1} + y_{3m}) \quad (13)$$

Para a aplicação das fórmulas (11), (12) e (13), a integral da equação (10), fica:

$$I_c \int_L \frac{\bar{M}M}{I} ds = \int_{x_0}^{x_n} \eta y(x) dx$$

(14)

Quadratura de Gauss

Na análise numérica, o método de quadratura é uma aproximação de uma integral definida de uma função. Uma quadratura de Gauss de grau n, é uma quadratura que seleciona os pontos de avaliação de maneira ótima e não igualmente espaçados, construídos para dar o resultado de um polinómio de grau 2n-1 ou menos, em um domínio de integração convencionado entre [−1, 1] (Figura 4).

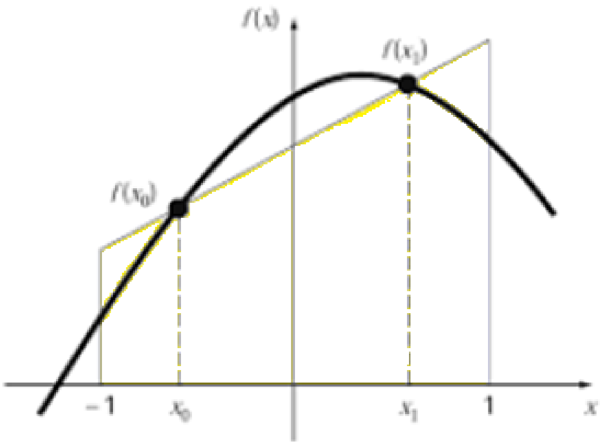

Figura 4 – Quadratura de Gauss para dois pontos.

A fórmula adotada neste trabalho é a de Gauss-Legendre (Chapra e Canale, 2008). Este método consiste em transformar uma integral definida de uma função f(x) (Figura 4), dada na equação 15:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

(15)

Em outra integral, na seguinte forma:

$$I = \int_{-1}^{1} F(t)dt$$

(16)

Fazendo-se a troca de variáveis:

$x = \frac{1}{2}(b-a)t + \frac{1}{2}(b+a)$

(17)

Então, a função F(t) da equação 16, será:

$F(t) = \frac{1}{2}(b-a)f(\frac{1}{2}(b-a)t + \frac{1}{2}(b+a))$

(18)

Com isso, o cálculo da integral (15) utilizando-se a quadratura de Gauss-Legendre, para polinômios de Legendre de ordem n (Gilat e Subramaniam, 2008), será:

$I = \int_{-1}^{1} F(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} A_i\, F(t_i)$

(19)

Onde:

n - número de pontos

A_i - pesos

t_i - pontos (raízes)

Na tabela 1 são apresentadas as raízes dos pontos de Gauss com seus respectivos pesos.

Tabela 1 – Pontos e pesos de Gauss-Legendre.

n	i	t_i	A_i
1	1	0	2
2	2; 1	±0,57735 02691 89626	1
3	2	0	0,88888 88888 88889
	3; 1	±0,77459 66692 41483	0,55555 55555 55556
4	3; 2	±0,33998 10435 84856	0,65214 51548 62546
	4; 1	±0,86113 63115 94053	0,34785 48451 37454
5	3	0	0,56888 88888 88889
	4; 2	±0,53846 93101 05683	0,47862 86704 99366
	5, 1	±0,90617 98459 38664	0,23692 68850 56189
6	4; 3	±0,23861 91860 83197	0,46791 39345 72691
	5; 2	±0,66120 93864 66265	0,36076 15730 48139
	6; 1	±0,93246 95142 03152	0,17132 44923 79170
7	4	0	0,41795 91836 73469
	5; 3	±0,40584 51513 77397	0,38183 00505 05119
	6; 2	±0,74153 11855 99394	0,27970 53914 89277
	7; 1	±0,94910 79123 42759	0,12948 49661 68870
8	5; 4	±0,18343 46424 95650	0,36268 37833 78362
	6; 3	±0,52553 24099 16329	0,31370 66458 77887
	7; 2	±0,79666 64774 13627	0,22238 10344 53374
	8; 1	±0,96028 98564 97536	0,10122 85362 90376
9	5	0	0,33023 93550 01260
	6; 4	±0,32425 34234 03809	0,31234 70770 40003
	7; 3	±0,61337 14327 00590	0,26061 06964 02935
	8; 2	±0,83603 11073 26636	0,18064 81606 94857
	9; 1	±0,96816 02395 07626	0,08127 43883 61574
10	6; 5	±0,14887 43389 81631	0,29552 42247 14753
	7; 4	±0,43339 53941 29247	0,26926 67193 09996
	8; 3	±0,67940 95682 99024	0,21908 63625 15982
	9; 2	±0,86506 33666 88985	0,14945 13491 50581
	10; 1	±0,97390 65285 17172	0,06667 13443 08688

4 – Resultados

Nos exemplos a seguir, as estruturas foram divididas em 6, 12, 18 e 24 partes iguais, para a aplicação das fórmulas dos trapézios e as de Simpson, e até 8 pontos para a aplicação da fórmula da quadratura de Gauss-Legendre, para poder-se obter resultados satisfatórios em relação aos resultados obtidos analiticamente.

Exemplo 1: Cálculo do deslocamento vertical na extremidade livre de uma viga em balanço com variação da sua altura (Figura 5).

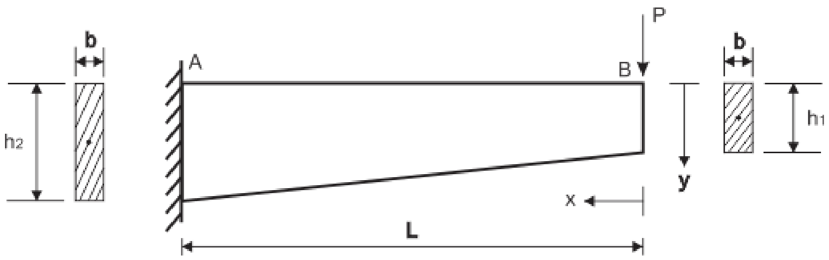

Figura 5 – Viga em balanço

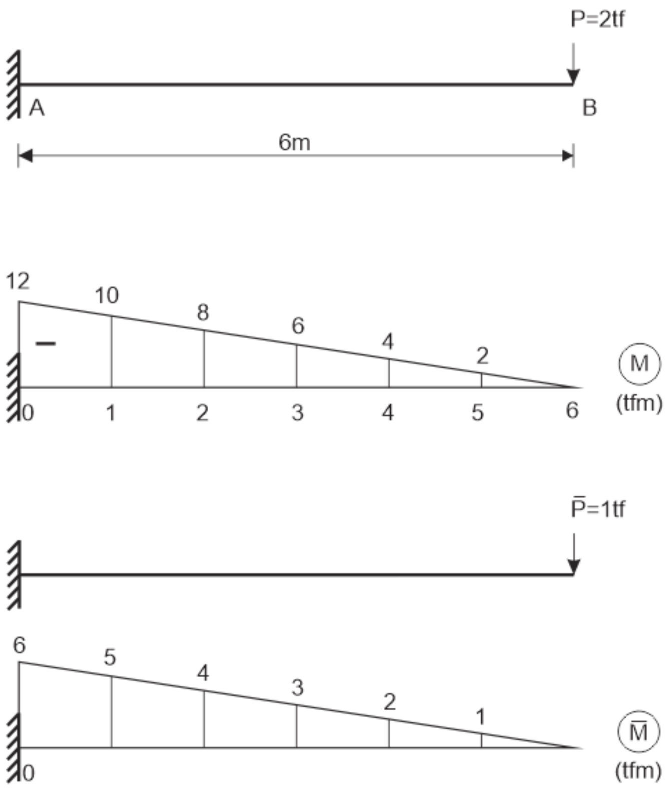

Figura 6 – Diagramas do momento fletor

Na tabela 2 são apresentados os cálculos da viga da figura 5, dividida em 6 partes iguais, com seus momentos fletores correspondentes apresentados na figura 6.

Na tabela 3 é apresentado um resumo de resultados do deslocamento vertical do ponto B, para 6, 12, 18 e 24 divisões da viga.

Tabela 2- Valores obtidos numericamente para divisão em 6 partes

MÍSULA RETA ASSIMÉTRICA											
h1=	0,3	L=	6	n=	6	Δx=	1	P=	2		
h2=	0,6	E=	2,10E+06	b=	0,1	EIc=	4,73E+02				
						SIMPSON (Δx=L/2m)		SIMPSON (Δx=L/3m)		TRAPEZIOS (Δx=L/m)	
SEÇÃO	h	Ic/I	M	m	η	k	kη	k	kη	k	kη
0	0,600000	0,125000	-12,000	-6,000	9,000000	1	9,000000	1	9,000000	1	9,000000
1	0,550000	0,162284	-10,000	-5,000	8,114200	4	32,456799	3	24,342600	2	16,228400
2	0,500000	0,216000	-8,000	-4,000	6,912000	2	13,824000	3	20,736000	2	13,824000
3	0,450000	0,296296	-6,000	-3,000	5,333333	4	21,333333	2	10,666667	2	10,666667
4	0,400000	0,421875	-4,000	-2,000	3,375000	2	6,750000	3	10,125000	2	6,750000
5	0,350000	0,629738	-2,000	-1,000	1,259475	4	5,037901	3	3,778426	2	2,518950
6	0,300000	1,000000	0,000	0,000	0,000000	1	0,000000	1	0,000000	1	0,000000
						Σ=	88,402034	Σ=	78,64869	Σ=	58,98802
						EIcδθA=	29,467345	EIcδθA=	29,493259	EIcδθA=	29,494008
						δVB=	6,2365E-02	δVB=	6,2420E-02	δVB=	6,2421E-02

Tabela 3- Resumo de valores obtidos numericamente

MÍSULA RETA ASSIMÉTRICA			
h1=0,3 m	L=6 m	P=2 tf	
h2=0,6 m	b=0,1 m	E=2,10 E+06	tf/m2
		δVB[m] E-02	
	TRAPEZIOS	SIMPSON	SIMPSON
INTERVALOS	(Δx=L/m)	(Δx=L/2m)	(Δx=L/3m)
6 (Δx=1)	6,2421	6,2365	6,2420
12 (Δx=1/2)	6,2333	6,2310	6,2315
18 (Δx=1/3)	6,2320	6,2307	6,2308
24 (Δx=1/4)	6,2314	6,2306	6,2307

Os valores obtidos utilizando-se a quadratura de Gauss-Legendre para até oito pontos, são apresentados na tabela 4.

Tabela 4- Valores obtidos numericamente por Gauss-Legendre

N. PONTOS	δVB[m] E-02
1	6,7725
2	6,1174
3	6,2185
4	6,2298
5	6,2306
6	6,2306
7	6,2306
8	6,2306

O deslocamento calculado via integração analítica, após simplificações é dada pela equação (20).

$$\delta_{VB} = \frac{12PL}{Eb(h_2 - h_1)}\left(2\left(\frac{h_1}{h_2} - 1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{h_1^2}{h_2^2} - 1\right) + \ln\left(\frac{h_2}{h_1}\right)\right) \tag{20}$$

Cujo resultado é: $\delta_{VB}=6{,}2306_x10^{-2}$ m

Exemplo 2: Cálculo da rotação da tangente à elástica no ponto A de uma viga com mísula parabólica simétrica.

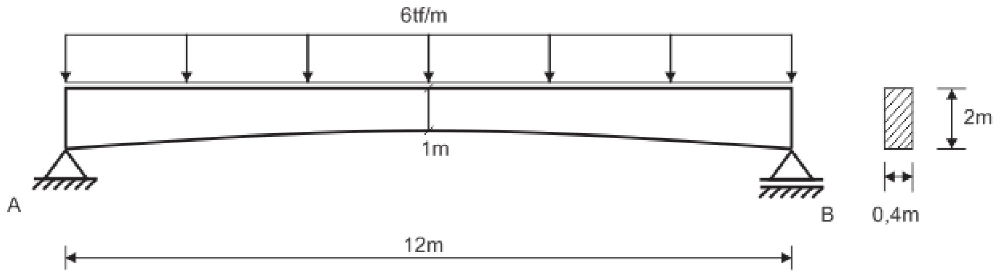

Figura 7 – Viga biapoiada

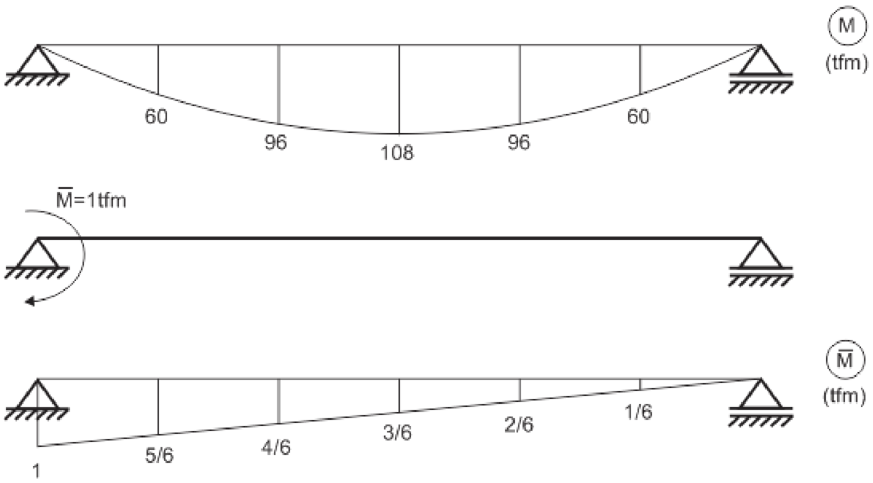

Figura 8 – Diagramas do momento fletor

Na tabela 5 são apresentados os cálculos da viga da figura 7, dividida em 6 partes iguais, com seus momentos fletores correspondentes apresentados na figura 8.

Tabela 5- Valores obtidos numericamente para divisão em 6 partes

VARIAÇÃO PARABÓLICA DE INÉRCIA											
h1=	1	L=	12	n=	6	Δx=	2	q=	6		
h2=	2	E=	2,10E+06	b=	0,4	EIc=	7,00E+04				
						SIMPSON (Δx=L/2m)		SIMPSON (Δx=L/3m)		TRAPEZIOS (Δx=L/m)	
SEÇÃO	h	Ic/I	M	m	η	k	kη	k	kη	k	kη
0	2,000000	0,125000	0	1,000000	0,000000	1	0,000000	1	0,000000	1	0,000000
1	1,444444	0,331816	60	0,833333	16,590806	4	66,363223	3	49,772417	2	33,181611
2	1,111111	0,729000	96	0,666667	46,656000	2	93,312000	3	139,968000	2	93,312000
3	1,000000	1,000000	108	0,500000	54,000000	4	216,000000	2	108,000000	2	108,000000
4	1,111111	0,729000	96	0,333333	23,328000	2	46,656000	3	69,984000	2	46,656000
5	1,444444	0,331816	60	0,166667	3,318161	4	13,272645	3	9,954483	2	6,636322
6	2,000000	0,125000	0	0,000000	0,000000	1	0,000000	1	0,000000	1	0,000000
						Σ=	435,603867	Σ=	377,67890	Σ=	287,78593
						EIcδθA=	290,402578	EIcδθA=	283,259175	EIcδθA=	287,785934
						δθA=	4,1486E-03	δθA=	4,0466E-03	δθA=	4,1112E-03

Na tabela 6 é apresentado um resumo de resultados da rotação da tangente à elástica no ponto A, para 6, 12, 18 e 24 divisões da viga.

Tabela 6- Valores obtidos numericamente

MÍSULA PARABÓLICA SIMÉTRICA			
h1=1 m	L=12 m	q=6 tf/m	
h2=2 m	b=0,4 m	E=2,10 E+06	tf/m2
		δθA[rad] E-03	
	TRAPEZIOS	SIMPSON	SIMPSON
INTERVALOS	(Δx=L/m)	(Δx=L/2m)	(Δx=L/3m)
6 (Δx=2)	4,1112	4,1486	4,0466
12 (Δx=1)	4,1266	4,1317	4,1310
18 (Δx=2/3)	4,1295	4,1319	4,1318
24 (Δx=1/2)	4,1306	4,1319	4,1319

Os valores obtidos utilizando-se a quadratura de Gauss-Legendre para até oito pontos, são apresentados na tabela 7.

Tabela 7- Valores obtidos numericamente por Gauss-Legendre

N. PONTOS	δθA[rad] E-03
1	9,2571
2	2,6036
3	4,6165
4	4,0032
5	4,1638
6	4,1245
7	4,1336
8	4,1316

O deslocamento calculado via integração analítica é: $\delta_{\theta A}=4{,}1319_x 10^{-3}$ rad.

Exemplo 3: Cálculo do deslocamento vertical do ponto A de uma viga biapoiada com balanços, com mísula reta simétrica entre os apoios. Sendo a=b=3 m e L=12 m.

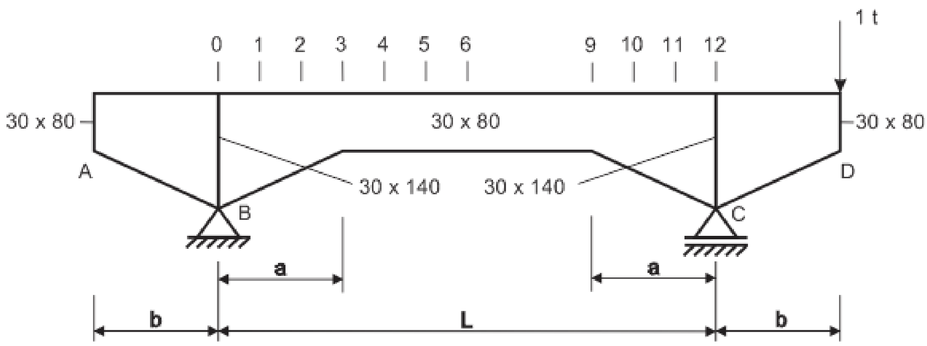

Figura 9 – Viga biapoiada com balanços

Na tabela 8 são apresentados os cálculos da viga da figura 9, dividida em 12 partes iguais, com seus momentos fletores correspondentes apresentados na figura 10.

Tabela 8- Valores obtidos numericamente para divisão em 12 partes

MÍSULA RETA SIMÉTRICA											
h1=	0,8	L=	12	n=	12	Δx=	1	Mb=	3		
h2=	1,4	E=	2,10E+06	b=	0,3	EIc=	2,69E+04				
						SIMPSON (Δx=L/2m)		SIMPSON (Δx=L/3m)		TRAPEZIOS (Δx=L/m)	
SEÇÃO	h	Ic/I	M	m	η	k	kη	k	kη	k	kη
0	1,400000	0,186589	0,000	-3,000	0,000000	1	0,000000	1	0,000000	1	0,000000
1	1,200000	0,296296	-0,250	-2,750	0,203704	4	0,814815	3	0,611111	2	0,407407
2	1,000000	0,512000	-0,500	-2,500	0,640000	2	1,280000	3	1,920000	2	1,280000
3	0,800000	1,000000	-0,750	-2,250	1,687500	4	6,750000	2	3,375000	2	3,375000
4	0,800000	1,000000	-1,000	-2,000	2,000000	2	4,000000	3	6,000000	2	4,000000
5	0,800000	1,000000	-1,250	-1,750	2,187500	4	8,750000	3	6,562500	2	4,375000
6	0,800000	1,000000	-1,500	-1,500	2,250000	2	4,500000	2	4,500000	2	4,500000
7	0,800000	1,000000	-1,750	-1,250	2,187500	4	8,750000	3	6,562500	2	4,375000
8	0,800000	1,000000	-2,000	-1,000	2,000000	2	4,000000	3	6,000000	2	4,000000
9	0,800000	1,000000	-2,250	-0,750	1,687500	4	6,750000	2	3,375000	2	3,375000
10	1,000000	0,512000	-2,500	-0,500	0,640000	2	1,280000	3	1,920000	2	1,280000
11	1,200000	0,296296	-2,750	-0,250	0,203704	4	0,814815	3	0,611111	2	0,407407
12	1,400000	0,186589	-3,000	0,000	0,000000	1	0,000000	1	0,000000	1	0,000000
						Σ=	47,689630	Σ=	41,437222	Σ=	31,374815
						EIcδVA=	15,896543	EIcδVA=	15,538958	EIcδVA=	15,687407
						δVA=	5,9139E-04	δVA=	5,7809E-04	δVA=	5,8361E-04

Na tabela 9 é apresentado um resumo de resultados do deslocamento vertical do ponto A da viga da figura 9, para 6, 12, 18 e 24 divisões do vão central.

Os valores obtidos utilizando-se a quadratura de Gauss-Legendre para até oito pontos, são apresentados na tabela 10.

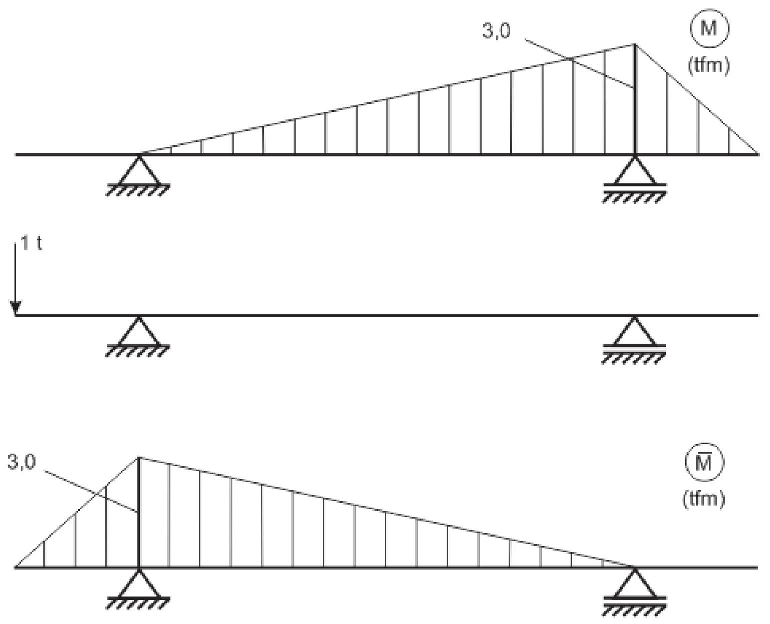

Figura 10 – Diagramas do momento fletor

Tabela 9- Resumo de valores obtidos numericamente

MÍSULA RETA ASSIMÉTRICA			
h1=0,8 m	L=12 m	Mb=3 tfm	
h2=1,4 m	b=0,3 m	E=2,10 E+06	tf/m2
		δVA[m] E-04	
	TRAPEZIOS	SIMPSON	SIMPSON
INTERVALOS	(Δx=L/m)	(Δx=L/2m)	(Δx=L/3m)
6 (Δx=2)	5,6027	5,4861	5,6752
12 (Δx=1)	5,8361	5,9139	5,7809
18 (Δx=2/3)	5,9121	5,8688	5,9508
24 (Δx=1/2)	5,7856	5,7688	5,7694

Tabela 10- Valores obtidos numericamente por Gauss-Legendre

N. PONTOS	δVA[m] E-04
1	5,8676
2	5,7511
3	5,7677
4	5,7683
5	5,7683
6	5,7683
7	5,7683
8	5,7683

O deslocamento calculado via integração analítica é: $\delta_{VA}=5,7683_x10^{-4}$ m.

5 – Considerações finais

Pode-se observar que a medida que a estrutura tem mais barras com momento de inércia variável, a solução via integração analítica tende a ser mais trabalhosa, e ainda, sem contar com outros carregamentos que poderão estar atuando ao longo dessas barras. A utilização das fórmulas dos trapézios e as de Simpson para integração numérica, no cálculo de deslocamentos em estruturas isostáticas com barras de momento de inércia variável, pode ser realizada com bastante eficiência e aproximação, dependendo do número de divisões necessárias para atingir tais resultados, podendo representar este fato, uma desvantagem em relação a aplicação da Quadratura de Gauss-Legendre, já que pode-se observar que utilizando a quadratura de Gauss-Legendre, os resultados obtidos apresentam uma melhor aproximação e eficiência com poucos pontos de Gauss, especialmente quando se trata de momentos inércia com variação linear, sendo possível ainda, aumentar o número de pontos de Gauss, caso fosse necessário, sem implicar no acréscimo de outros cálculos ou divisões das barras. Esses cálculos pedem ser facilmente realizados com a ajuda de uma planilha eletrônica ou com a implementação de um programa para computador, que poderá considerar situações mais abrangentes, superando assim, as limitações das tabelas existentes.

6 – Referências

BARROSO, L. C., BARRROSO, M. M. A., CAMPOS, F. F., CARVALHO, M. L. B., MAIA, M. L. **Cálculo numérico (com aplicações)**. São Paulo: Harbra, 1987.

CHAPRA, S. e CANALE, R. **Métodos numéricos para engenharia**. São Paulo: McGraw Hill, 2008.

GILAT, A.; SUBRAMANIAM, V. **Métodos numéricos para engenheiros e cientistas**. Porto Alegre: Bookman, 2008.

GULDAN, R. **Estructuras aporticadas y vigas continuas**. Buenos Aires: El Ateneo, 1956.

POLILLO, A. **Exercícios de hiperestática**. Rio de Janeiro: Científica, 1982.

ROCHA, A. M. **Teoria e prática das estruturas**. Rio de Janeiro: Científica, 1973.

SORIANO, H. L., LIMA, S. S. **Análise de estruturas**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2004.

SÜSSEKIND, J. C. **Curso de Análise Estrutural**. Rio de Janeiro: Globo, 1983.

TIMOSHENKO, S. P., GERE, J. E. **Mecânica dos sólidos**. Rio de Janeiro: LTC, 1994.