

## CÁLCULO DE DESLOCAMENTOS EM ESTRUTURAS ISOSTÁTICAS DE BARRAS COM MOMENTO DE INÉRCIA VARIÁVEL UTILIZANDO-SE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

### CÁLCULO DE DESPLAZAMIENTOS EN ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS DE BARRAS CON MOMENTO DE INERCIA VARIABLE UTILIZANDOSE INTEGRACIÓN NUMÉRICA

**Prof. Dr. EDSON TEJERINA CALDERÓN**

UEG - CCET, Campus Henrique Santillo, Anápolis - GO

PUC-GO, Campus Praça Universitária, Goiânia - GO

edtejerin@uol.com.br

**Resumo:** A seção transversal de uma barra pode variar ao longo do seu comprimento, seja na sua altura ou na sua espessura ou nas duas direções, nesses casos, a área da seção transversal e seu momento de inércia se tornam variáveis, fazendo com que aumente a dificuldade de cálculo, do ponto de vista matemático, já que envolve o cálculo de integrais cujos integrandos nem sempre têm soluções exatas, sendo necessária a adoção de uma função substituta ou um modelo substituto. Existem três classes de métodos para análise: a) Métodos de integração direta, b) Métodos utilizando analogias e c) Métodos utilizando a Energia de Deformação. Neste trabalho serão apresentadas as três classes de métodos, posteriormente será escolhido aquele que se torna mais adequado para aplicar as técnicas de integração numérica. Nos exemplos apresentados serão calculados deslocamentos de estruturas isostáticas utilizando-se técnicas de integração numérica, sendo necessário a divisão da estrutura em várias partes iguais, para facilitar os cálculos, e as seções serão consideradas retangulares com variação linear ou parabólica da altura, mantendo-se a espessura constante.

**Palavras-Chave:** Deslocamento. Estrutura Isostática. Integração numérica.

**Resumen:** La sección transversal de una barra puede variar a lo largo de su longitud, sea en su altura o en su anchura o en las dos direcciones, en esos casos, el área de la sección transversal y su momento de inercia se tornan variables, haciendo que aumente la dificultad del cálculo, del punto de vista matemático, ya que envuelve el cálculo de integrales cuyos integrandos no siempre tienen soluciones exactas, siendo necesaria la adopción de una función substituta o un modelo substituto. Existen tres clases de métodos para análisis: a) Métodos de integración directa, b) Métodos utilizando analogías y c) Métodos utilizando la Energía de Deformación. En este trabajo serán presentadas las tres clases de métodos, posteriormente será escogido aquel que se torne más adecuado para aplicar las técnicas de integración numérica. En los ejemplos presentados serán calculados desplazamientos de estructuras isostáticas utilizándose técnicas de integración numérica, siendo necesario la división de la estructura en varias partes iguales, para facilitar los cálculos, y las secciones serán consideradas retangulares con variación lineal o parabólica de la altura, manteniéndose la anchura constante.

**Palabras clave:** Desplazamiento. Estructura Isostática. Integración numérica.

### Introdução

No dimensionamento de uma estrutura é necessário conhecer os esforços internos (força normal, força cortante, momento de torção e momento fletor) que atuam ao longo dos eixos dos elementos que compõem a estrutura, mas, também é necessário conhecer os deslocamentos (rotações e translações) que ocorrem ao longo desses eixos, já que esses deslocamentos poderão ultrapassar os valores admissíveis fornecidos pelas normas correspondentes aos materiais (aço, concreto, madeira) com os quais está feita a estrutura.

Sendo necessário realizar um novo dimensionamento da estrutura, de forma que não ultrapassem os deslocamentos admissíveis.

Existem vários métodos para calcular deslocamentos em estruturas, que podem ser classificados em três tipos:

- a) Métodos de integração direta;
- b) Métodos utilizando analogias;
- c) Métodos utilizando a energia de deformação.

#### **a) Métodos de integração direta**

Os métodos de integração são baseados na equação da linha elástica, obtida a partir do estudo das tensões normais de uma viga submetida à flexão pura (RILEY et al., 2003), ficando esta com a forma de um arco de circunferência (Figura 1). No regime elástico, a curvatura da superfície neutra (CRAINIG, 2003), pode ser expressa por:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI}$$

(1)

sendo:

M (x) - momento fletor

E - módulo de elasticidade transversal

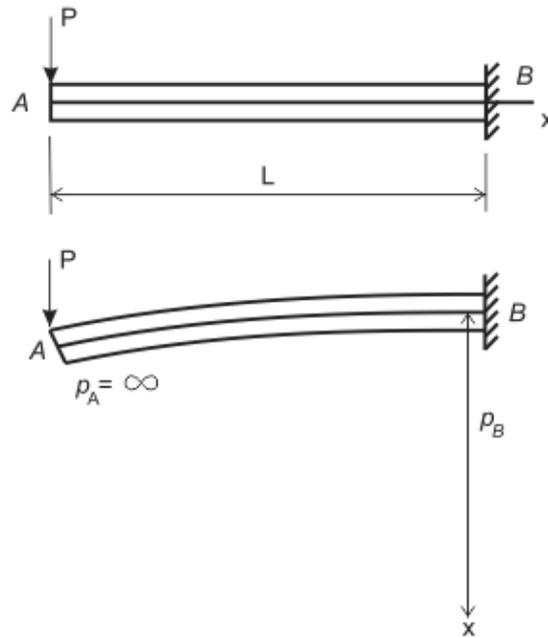
I - momento de inércia da área da seção transversal

$\rho$  - raio de curvatura

A partir do cálculo diferencial, a curvatura  $\kappa$  de uma curva plana em um ponto Q(x,y) é dada por:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

(2)



**Figura 1** – Deformação de uma viga à flexão  
**Organização:** Autor

Sendo que  $y$  representa o deslocamento vertical em relação à coordenada  $x$ . A declividade  $\frac{dy}{dx}$ , por ser muito pequena, pode ser desprezada (HIBBELER,2010), então a equação (1) fica:

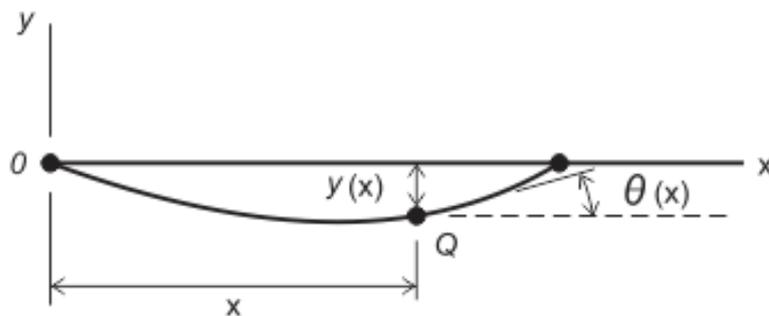
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

(3)

Integrando-se a equação (3), tem-se:

$$EI \frac{dy}{dx} = \int M(x)dx + C_1$$

(4)



**Figura 2** – Declividade  $\theta(x)$  em um ponto  $Q(x,y)$   
**Organização:** Autor

Sendo que  $\theta(x)$  é o ângulo que a tangente à curva elástica no ponto Q(x,y) forma com a horizontal, pode-se escrever:

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta(x) \cong \theta(x)$$

(5)

Desta forma, a equação (4) fica:

$$EI\theta(x) = \int M(x)dx + C_1$$

(6)

Integrando-se mais uma vez a equação (4), tem-se:

$$EIy = \int \left[ \int M(x)dx + C_1 \right] dx + C_2$$

(7)

Desta forma, a equação (7) permitirá calcular deslocamentos lineares em qualquer ponto da estrutura.

### b) Métodos utilizando analogias

Os métodos que utilizam analogias são o método da Viga Conjugada (Martha, 2010) e o método das Áreas do Diagrama de Momento (Beer et ali, 2006).

No método das Áreas do Diagrama de Momento, ao invés de exprimir-se o momento fletor como uma função  $M(x)$  que deve ser integrada, é utilizado o diagrama da grandeza  $\frac{M(x)}{EI}$  ao longo do eixo da estrutura, para calcular certas áreas definidas por esse diagrama, bem como os momentos estáticos dessas áreas. Esta forma de abordar o problema permite calcular o deslocamentos de um ponto de cada vez e é apropriada para estruturas com seção variável. É baseado em dois teoremas.

1º Teorema: O ângulo que formam entre si as tangentes em C e em D (Figura 3) é igual à área do diagrama de momentos fletores, entre esses dois pontos, dividida por EI.

Das equações (3) e (5), obtêm-se:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M(x)}{EI} \tag{8}$$

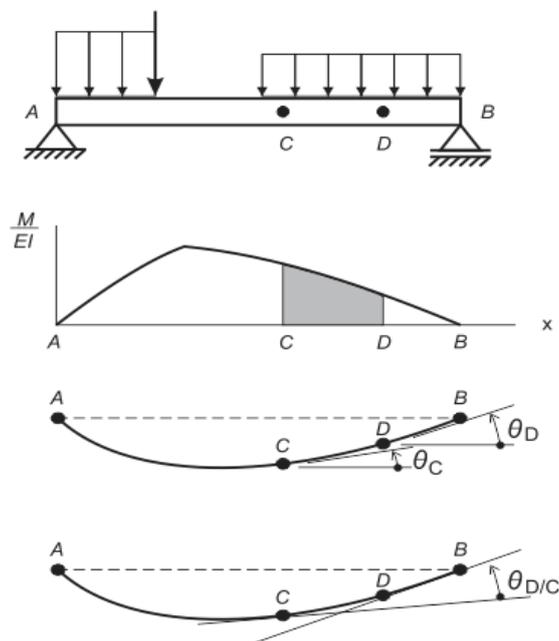
Considerando dois pontos quaisquer da estrutura, C e D (Figura 3), e integrando-se os dois membros da equação (8), obtêm-se:

$$\int_{\theta_C}^{\theta_D} d\theta = \int_{x_C}^{x_D} \frac{M(x)}{EI} dx \quad (9)$$

$$\theta_D - \theta_C = \int_{x_C}^{x_D} \frac{M(x)}{EI} dx \quad (10)$$

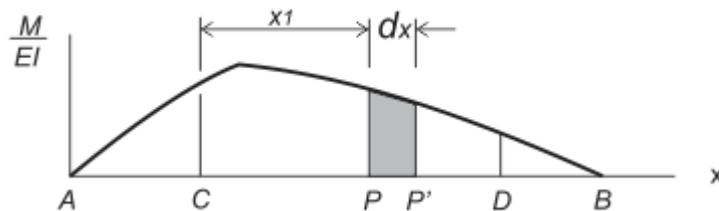
Onde:  $\theta_C$  e  $\theta_D$  são as declividades nos pontos C e D, respectivamente. Chamando  $\theta_{D/C}$  o ângulo formado entre essas declividades, tem-se:

$$\theta_{D/C} = \text{Área sob o diagrama de } (M/EI) \text{ entre C e D} \quad (11)$$



**Figura 3** - Declividades nos pontos C e D  
**Organização:** Autor

2º Teorema: O desvio tangencial de C em relação a D,  $t_{C/D}$ , é igual ao momento estático da área limitada pelo diagrama  $M/EI$  entre os pontos C e D em relação ao eixo vertical que passa pelo ponto C (Figura 4).



**Figura 4** - Diagrama  $M/EI$   
**Organização:** Autor

Considerando os pontos P e P' situados entre C e D (Figura 5), e separados de uma distância dx. Observa-se que as tangentes à linha elástica interceptam a vertical pelo ponto C em pontos que formam o comprimento dt. A declividade em P e o ângulo dθ, formado pelas tangentes à linha elástica por P e P', são valores muito pequenos e pode-se considerar que dt é igual ao arco da circunferência de raio x<sub>1</sub> do ângulo dθ, desta forma:

$$dt = x_1 d\theta \quad (12)$$

Substituindo-se o valor de dθ da equação (8) na equação (12), tem-se:

$$dt = x_1 \frac{M(x)}{EI} dx \quad (13)$$

Integrando-se a equação (13) de C até D, tem-se:

$$t_{C/D} = \int_C^D x_1 \frac{M(x)}{EI} dx \quad (14)$$

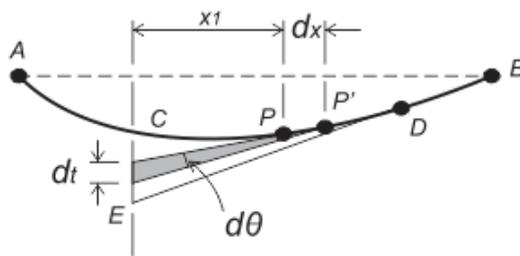


Figura 5 - Tangentes à elástica nos pontos P e P'  
**Organização:** Autor

Lembrando que o momento estático de uma área em relação a um eixo é igual ao produto da área pela distância do seu baricentro até o eixo, isto é:

$$t_{C/D} = (\text{Área do diagrama de } (M/EI) \text{ entre C e D}) \cdot \bar{x}_1 \quad (15)$$

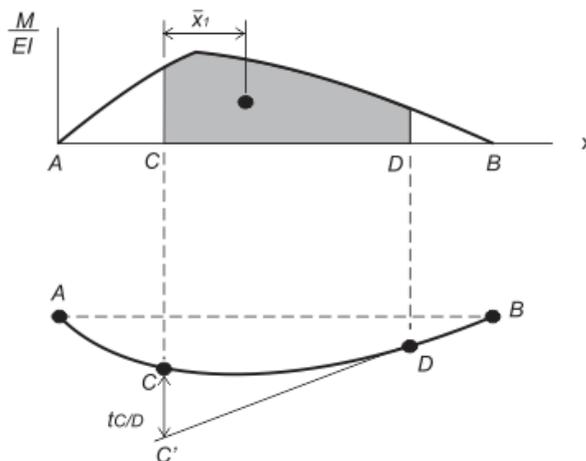


Figura 6 – Distância  $\bar{x}_1$   
**Organização:** Autor

Onde:  $\bar{x}_1$  é a distância do baricentro da área até o eixo vertical que passa por C (Figura 6).

Não se deve confundir o desvio tangencial de C em relação a D,  $t_{C/D}$ , com o desvio tangencial de D em relação a C,  $t_{D/C}$ , que representa a distância vertical do ponto D à tangente à curva elástica que passa pelo ponto C, obtido pelo produto da área sob o diagrama (M/EI) pela distância  $\bar{x}_2$  do seu baricentro até o eixo vertical que passa por D (Figura 7), isto é:

$$t_{D/C} = (\text{Área do diagrama de } (M/EI) \text{ entre C e D}) \cdot \bar{x}_2 \quad (16)$$

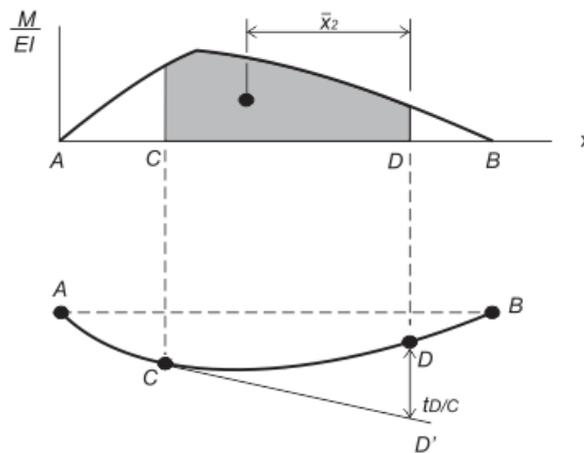


Figura 7 – Distância  $\bar{x}_2$   
Organização: Autor

### c) Métodos utilizando a energia de deformação

Os métodos anteriores se baseiam, essencialmente, em considerações geométricas, entretanto, muitos outros problemas podem ser resolvidos mais eficientemente utilizando-se as relações entre o trabalho realizado pelas forças externas e a energia interna, armazenada durante o processo de deformação da estrutura.

A energia de deformação é o trabalho armazenado, realizado pela força externa que age sobre um corpo deformando-o. A energia de deformação é definida como:

$$U = \int udV \quad (17)$$

Sendo:  $u$  o trabalho específico de deformação, que na forma geral é dada por:

$$u = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \varepsilon_{xy} + \tau_{xz} \varepsilon_{xz} + \tau_{yz} \varepsilon_{yz}) \quad (18)$$

Onde:  $\sigma$  e  $\tau$  são as tensões normais e de cisalhamento e  $\varepsilon$  e  $\gamma$  suas deformações específicas correspondentes.

Os deslocamentos em uma estrutura podem ser calculados pelo 2º Teorema de Castigliano (Timoshenko e Gere, 1994) e o Princípio dos Trabalhos Virtuais ou Teorema das Forças Virtuais (Soriano e Lima, 2004)

O 2º Teorema de Castigliano estabelece que a derivada parcial da energia de deformação, em relação a qualquer força externa aplicada  $P_i$ , fornece o deslocamento  $\delta_i$  sob o ponto de aplicação da força e na direção da mesma, isto é:

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} \quad (19)$$

No caso de vigas e pórticos, realizando-se algumas simplificações, a energia de deformação pode ser escrita como:

$$U = \int_L \frac{M^2}{2EI} ds \quad (20)$$

Desta forma, a equação (19) fica:

$$\delta_i = \int_L \frac{M}{2EI} \frac{\partial M}{\partial P_i} ds \quad (21)$$

O Princípio dos Trabalhos Virtuais para a um corpo elástico que atingiu sua configuração de equilíbrio (Sussekund,1983), afirma que o trabalho virtual total das forças externas que sobre ele atuam é igual ao trabalho virtual das forças internas (esforços solicitantes) nele atuantes, para todos os deslocamentos virtuais arbitrários (compatíveis com os vínculos do corpo) que lhe sejam impostos, isto é:

$$W_{ext} = W_{int} \quad (22)$$

O trabalho virtual das forças externas  $W_{ext}$  é dado por:

$$W_{ext} = \bar{P} \delta \quad (23)$$

Onde:  $\bar{P}$  é uma carga virtual aplicada na direção do deslocamento procurado.

O trabalho virtual das forças internas  $W_{int}$  é dado por:

$$W_{int} = \int_L \frac{\bar{M}M}{EI} ds + \int_L \frac{\bar{N}N}{EA} ds + \int_L \frac{\eta \bar{Q}Q}{GA} ds \quad (24)$$

Substituindo-se as equações (23) e (24) na equação (22), tem-se:

$$\bar{P} \delta = \int_L \frac{\bar{M}M}{EI} ds + \int_L \frac{\bar{N}N}{EA} ds + \int_L \frac{\eta \bar{Q}Q}{GA} ds \quad (25)$$

Sendo:

A - área da seção transversal

G - módulo de elasticidade transversal

$\eta$  - coeficiente de forma

M, N e Q - esforços solicitantes da carga externa real

$\bar{M}$ ,  $\bar{N}$  e  $\bar{Q}$  - esforços solicitantes da carga virtual  $\bar{P}$

Nos métodos expostos anteriormente foi considerado que a seção transversal fosse constante, por tanto, a área da seção transversal A e o momento de inércia I, também seriam constantes.

### Integração Numérica

Se a seção transversal de uma barra variar ao longo do seu comprimento, seja na sua altura ou na sua espessura ou nas duas direções, nesse caso, a área da seção transversal e seu momento de inércia se tornam variáveis, fazendo com que aumente a dificuldade de cálculo, do ponto de vista matemático, já que envolve o cálculo de integrais cujos integrandos nem sempre têm soluções exatas, sendo necessário então, recorrer a métodos de integração numérica.

Utilizando-se o Método baseado na Energia de Deformação, os deslocamentos em uma estrutura podem ser calculados pelo 2º Teorema de Castigliano (TIMOSHENKO; GERE, 1994) e o Princípio dos Trabalhos Virtuais ou Teorema das Forças Virtuais (SORIANO; LIMA, 2004)

Escolhendo-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais para calcular deslocamentos, no caso de vigas e pórticos, pode se considerar apenas os efeitos devido ao momento fletor, desta forma a equação (25), fica:

$$\bar{P}\delta = \int_L \frac{\bar{M}M}{EI} ds \quad (26)$$

Quando se considera que a seção transversal de uma barra é constante, significa que a área da seção transversal A e o momento de inércia I são também constantes, não havendo influência no cálculo das integrais.

Multiplicando-se ambos os membros da equação (26) por  $EI_c$ , tem-se:

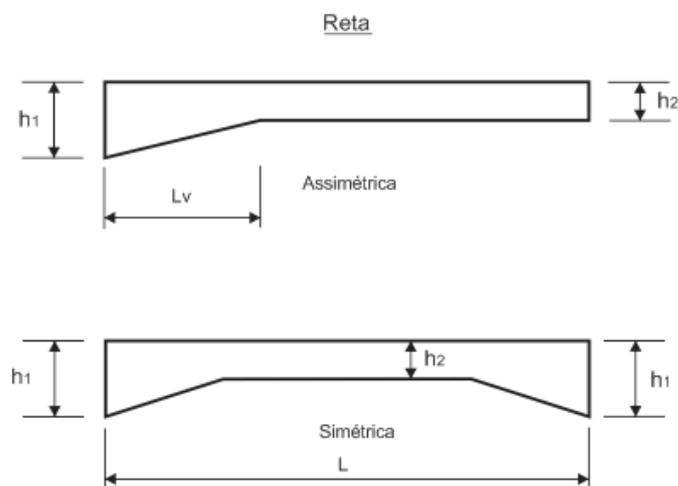
$$EI_c \bar{P}\delta = \frac{I_c}{I} \int_L \bar{M}M ds \quad (27)$$

Se a seção transversal de uma barra variar ao longo do seu comprimento, seja na sua altura ou na sua espessura ou nas duas direções, nesse caso, a área da seção transversal e seu momento de inércia se tornam variáveis, isto é:

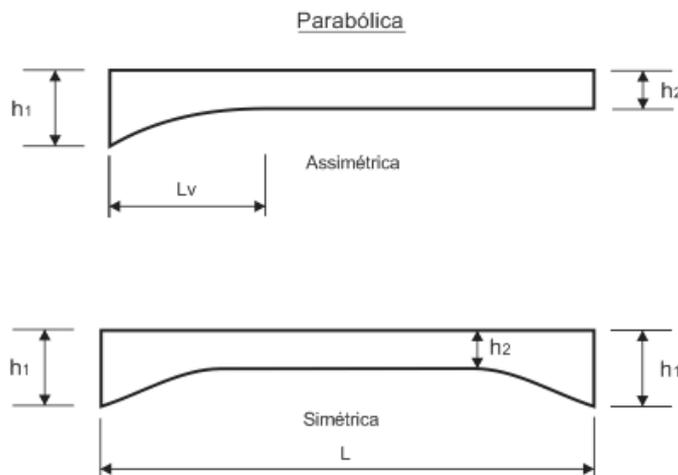
$$EI_c \bar{P}\delta = I_c \int_L \frac{\bar{M}M}{I} ds \quad (28)$$

Essa variação da inércia faz com que seu cálculo se torne laborioso e aumente a dificuldade, do ponto de vista matemático, já que envolve o cálculo de integrais que nem sempre têm soluções analíticas exatas, sendo necessário então, recorrer a métodos de integração numérica.

Em termos práticos, são utilizadas barras retas dotadas de uma mísula com variação linear ou parabólica em uma das suas extremidades, ou com duas mísulas simétricas nas suas extremidades (ROCHA, 1973), como se indicam nas figuras 8 e 9.



**Figura 8-** Tipos de mísulas com variação linear  
**Organização:** Autor



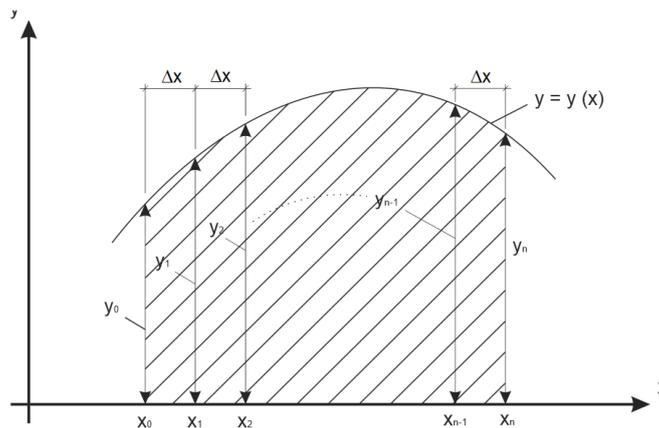
**Figura 9-** Tipos de mísulas com variação parabólica  
**Organização:** Autor

Para o tipo de mísulas indicadas nas figuras 8 e 9 são utilizadas as tabelas de GULDAN, R. (1956), que facilitam a determinação da integral da equação (28).

Outros autores como Rocha (1973), Polillo (1982) e Sssekind (1983), trazem em suas obras tabelas próprias e reproduzidas (GULDAN, 1956).

Quando a integração algébrica não  possível ou se torna bastante trabalhosa, o cálculo pode ser feito numericamente por médio de fórmulas que expressam a integral como uma combinação linear de um grupo selecionado de integrandos, para isso:

- a) Divide-se o segmento L em um número arbitrário de intervalos (iguais ou desiguais).
- b) Determina-se o valor numérico dos integrandos para cada intervalo.
- c) Calcula-se a área correspondente de cada intervalo por médio da fórmula de integração escolhida.
- d) Soma-se os valores das áreas elementares.



**Figura 10** – Integração numérica  
**Organização:** Autor

Algumas das fórmulas mais comuns so as seguintes:

**Fórmula dos trapzios ( $\Delta x=L/m$ )**

$$\int_{x_0}^{x_n} y(x)dx \cong (\Delta x/2)(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \dots + 2y_{m-3} + 2y_{m-2} + 2y_{m-1} + y_m) \quad (29)$$

**Fórmula de Simpson ( $\Delta x=L/2m$ )**

$$\int_{x_0}^{x_n} y(x)dx \cong (\Delta x/3)(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 4y_{2m-3} + 2y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}) \quad (30)$$

**Fórmula de Simpson ( $\Delta x=L/3m$ )**

$$\int_{x_0}^{x_n} y(x) dx \cong (3\Delta x/8)(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + \dots + 2y_{3m-3} + 3y_{3m-2} + 3y_{3m-1} + y_{3m})$$

..... (31)

Para a aplicação das fórmulas (28), (29) e (30), a integral da equação (28), fica:

$$\int_{x_0}^{x_n} y(x) dx = I_c \int_L \frac{\overline{MM}}{I} ds$$
 (32)

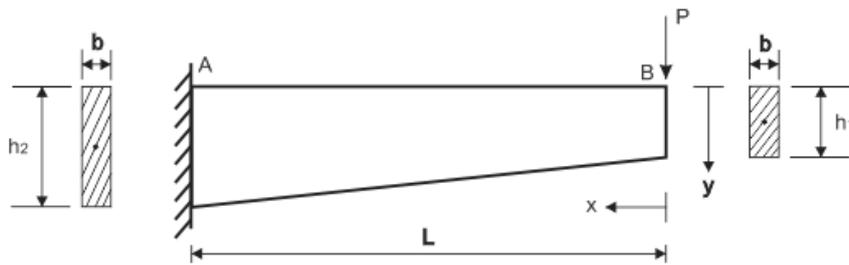
Ou seja:

$$y(x) = \frac{I_c}{I} \overline{MM}$$
 (33)

**Exemplos**

Nos exemplos a seguir, as estruturas foram divididas em 6, 12, 18 e 24 partes iguais, para obter resultados satisfatórios em relação aos resultados obtidos analiticamente.

**Exemplo1:** Cálculo do deslocamento vertical na extremidade livre de uma viga em balanço com variação da sua altura (Figura 11).



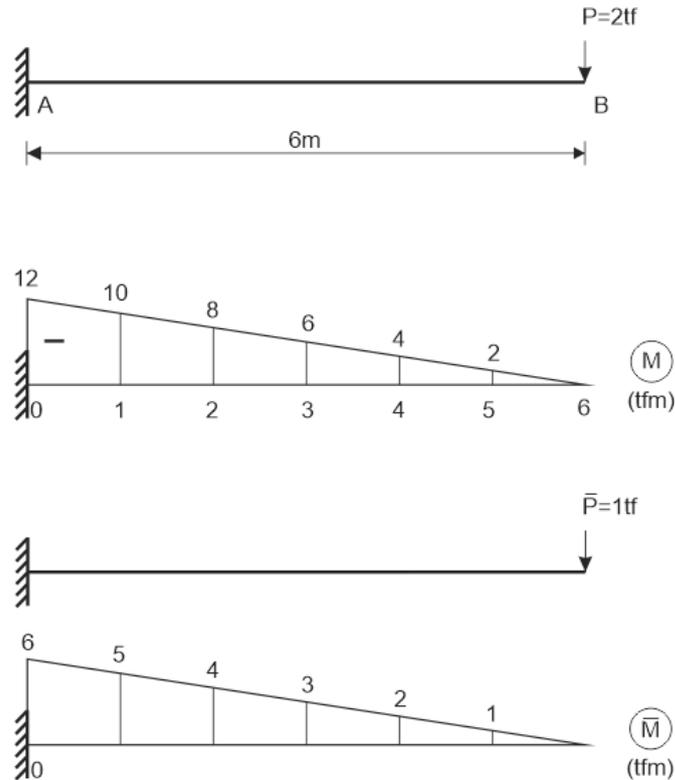
**Figura 11 – Viga em balanço**  
**Organização: Autor**

Tabela 1- Valores obtidos numericamente para divisão em 6 partes

MÍSULA RETA ASSIMÉTRICA											
h1= 0,3		L= 6		n= 6		Δx= 1		P= 2			
h2= 0,6		E= 2,10E+06		b= 0,1		Elc= 4,73E+02					
SEÇÃO	h	lc/l	M	m	η	SIMPSON (Δx=L/2m)		SIMPSON (Δx=L/3m)		TRAPEZIOS (Δx=L/m)	
						k	kη	k	kη	k	kη
0	0,600000	0,125000	-12,000	-6,000	9,000000	1	9,000000	1	9,000000	1	9,000000
1	0,550000	0,162284	-10,000	-5,000	8,114200	4	32,456799	3	24,342600	2	16,228400
2	0,500000	0,216000	-8,000	-4,000	6,912000	2	13,824000	3	20,736000	2	13,824000
3	0,450000	0,296296	-6,000	-3,000	5,333333	4	21,333333	2	10,666667	2	10,666667
4	0,400000	0,421875	-4,000	-2,000	3,375000	2	6,750000	3	10,125000	2	6,750000
5	0,350000	0,629738	-2,000	-1,000	1,259475	4	5,037901	3	3,778426	2	2,518950
6	0,300000	1,000000	0,000	0,000	0,000000	1	0,000000	1	0,000000	1	0,000000
						Σ=	88,402034	Σ=	78,64869	Σ=	58,98802
						ElcδθA=	29,467345	ElcδθA=	29,493259	ElcδθA=	29,494008
						δVB=	6,2365E-02	δVB=	6,2420E-02	δVB=	6,2421E-02

**Organização: Autor**

Na tabela 1 são apresentados os cálculos da viga da figura 11, dividida em 6 partes iguais, com seus momentos fletores correspondentes apresentados na figura 12.



**Figura 12** – Diagramas do momento fletor  
**Organização:** Autor

Na tabela 2 é apresentado um resumo de resultados do deslocamento vertical do ponto B, para 6, 12, 18 e 24 divisões da viga.

**Tabela 2-** Resumo de valores obtidos numericamente

MÍSULA RETA ASSIMÉTRICA			
h1=0,3 m	L=6 m	P=2 tf	
h2=0,6 m	b=0,1 m	E=2,10 E+06 tf/m <sup>2</sup>	
		δVB[m] E-02	
	TRAPEZIOS	SIMPSON	SIMPSON
INTERVALOS	(Δx=L/m)	(Δx=L/2m)	(Δx=L/3m)
6 (Δx=1)	6,2421	6,2365	6,2420
12 (Δx=1/2)	6,2333	6,2310	6,2315
18 (Δx=1/3)	6,2320	6,2307	6,2308
24 (Δx=1/4)	6,2314	6,2306	6,2307

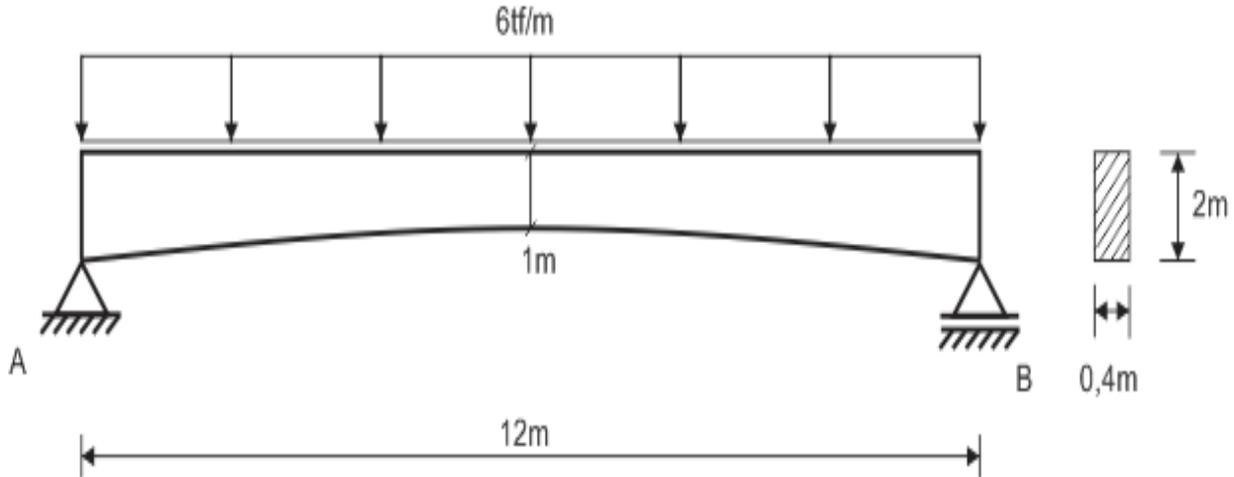
**Organização:** Autor

O deslocamento calculado via integração analítica, após simplificações é dada na equação (34).

$$\delta_{VB} = \frac{12PL}{Eb(h_2-h_1)} \left( 2 \left( \frac{h_1}{h_2} - 1 \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{h_1^2}{h_2^2} - 1 \right) + \ln\left(\frac{h_2}{h_1}\right) \right) \quad (34)$$

Cuja resposta é:  $\delta_{VB}=6,2306 \times 10^{-2}$  m

**Exemplo2:** Cálculo da rotação da tangente à elástica no ponto A de uma viga com mísula parabólica simétrica.



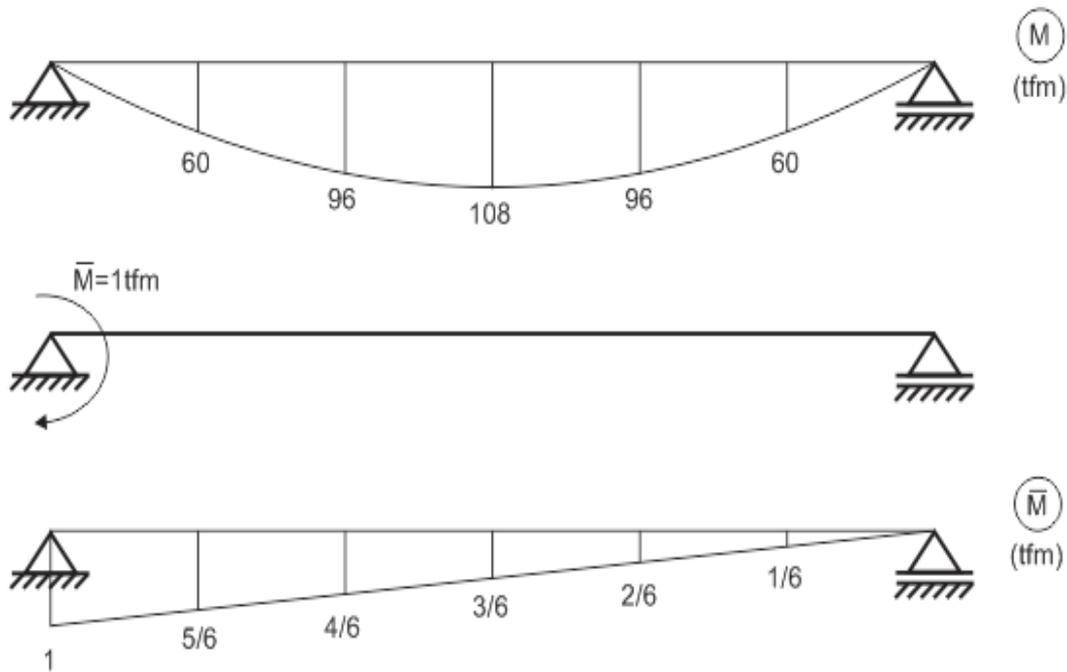
**Figura 13** – Viga biapoada  
**Organização:** Autor

Na tabela 3 são apresentados os cálculos da viga da figura 13, dividida em 6 partes iguais, com seus momentos fletores correspondentes apresentados na figura 14.

**Tabela 3-** Valores obtidos numericamente para divisão em 6 partes

VARIAÇÃO PARABÓLICA DE INÉRCIA											
h1= 1		L= 12		n= 6		Δx= 2		q= 6			
h2= 2		E= 2,10E+06		b= 0,4		Elc= 7,00E+04					
SEÇÃO	h	lc/l	M	m	η	SIMPSON (Δx=L/2m)		SIMPSON (Δx=L/3m)		TRAPEZIOS (Δx=L/m)	
						k	kη	k	kη	k	kη
0	2,000000	0,125000	0	1,000000	0,000000	1	0,000000	1	0,000000	1	0,000000
1	1,444444	0,331816	60	0,833333	16,590806	4	66,363223	3	49,772417	2	33,181611
2	1,111111	0,729000	96	0,666667	46,656000	2	93,312000	3	139,968000	2	93,312000
3	1,000000	1,000000	108	0,500000	54,000000	4	216,000000	2	108,000000	2	108,000000
4	1,111111	0,729000	96	0,333333	23,328000	2	46,656000	3	69,984000	2	46,656000
5	1,444444	0,331816	60	0,166667	3,318161	4	13,272645	3	9,954483	2	6,636322
6	2,000000	0,125000	0	0,000000	0,000000	1	0,000000	1	0,000000	1	0,000000
						Σ=	435,603867	Σ=	377,67890	Σ=	287,78593
						ElcδθA=	290,402578	ElcδθA=	283,259175	ElcδθA=	287,785934
						δθA=	4,1486E-03	δθA=	4,0466E-03	δθA=	4,1112E-03

**Organização:** Autor



**Figura 14** – Diagramas do momento fletor  
**Organização:** Autor

Na tabela 4 é apresentado um resumo de resultados da rotação da tangente à elástica no ponto A, para 6, 12, 18 e 24 divisões da viga.

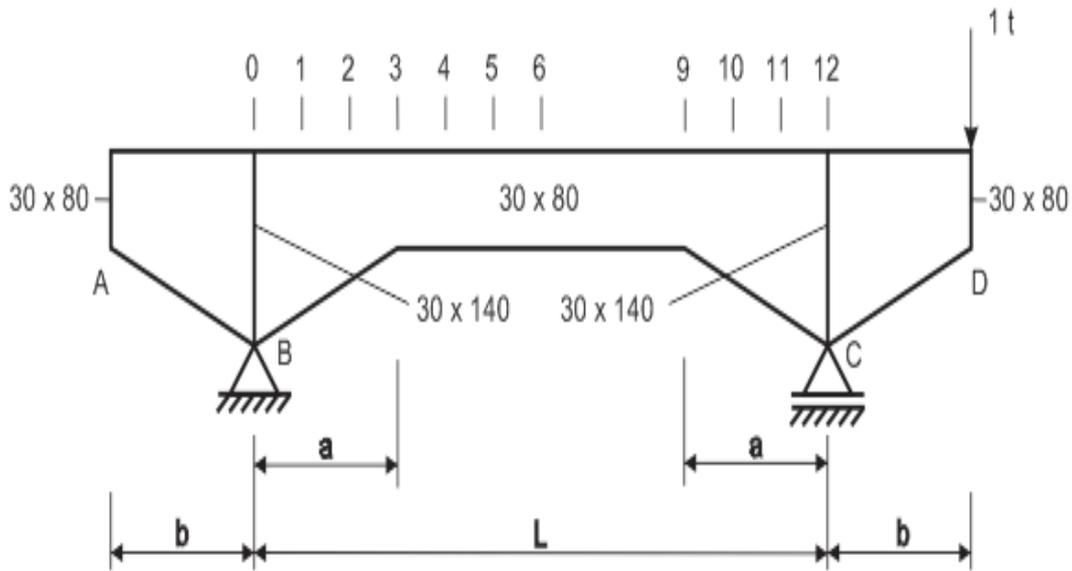
**Tabela 4-** Resumo de valores obtidos numericamente

MÍSULA PARABÓLICA SIMÉTRICA			
h1=1 m	L=12 m	q=6 tf/m	
h2=2 m	b=0,4 m	E=2,10 E+06	tf/m2
			$\delta\theta_A[\text{rad}] E-03$
	TRAPEZIOS	SIMPSON	SIMPSON
INTERVALOS	( $\Delta x=L/m$ )	( $\Delta x=L/2m$ )	( $\Delta x=L/3m$ )
6 ( $\Delta x=2$ )	4,1112	4,1486	4,0466
12 ( $\Delta x=1$ )	4,1266	4,1317	4,1310
18 ( $\Delta x=2/3$ )	4,1295	4,1319	4,1318
24 ( $\Delta x=1/2$ )	4,1306	4,1319	4,1319

**Organização:** Autor

O deslocamento calculado via integração analítica é:  $\delta_{\theta A}=4,1319 \times 10^{-3}$  rad.

**Exemplo 3:** Cálculo da rotação da tangente à elástica no ponto A de uma viga biapoiada com balanços, com mísula reta simétrica entre os apoios. Sendo  $a=b=3$  m e  $L=12$  m.



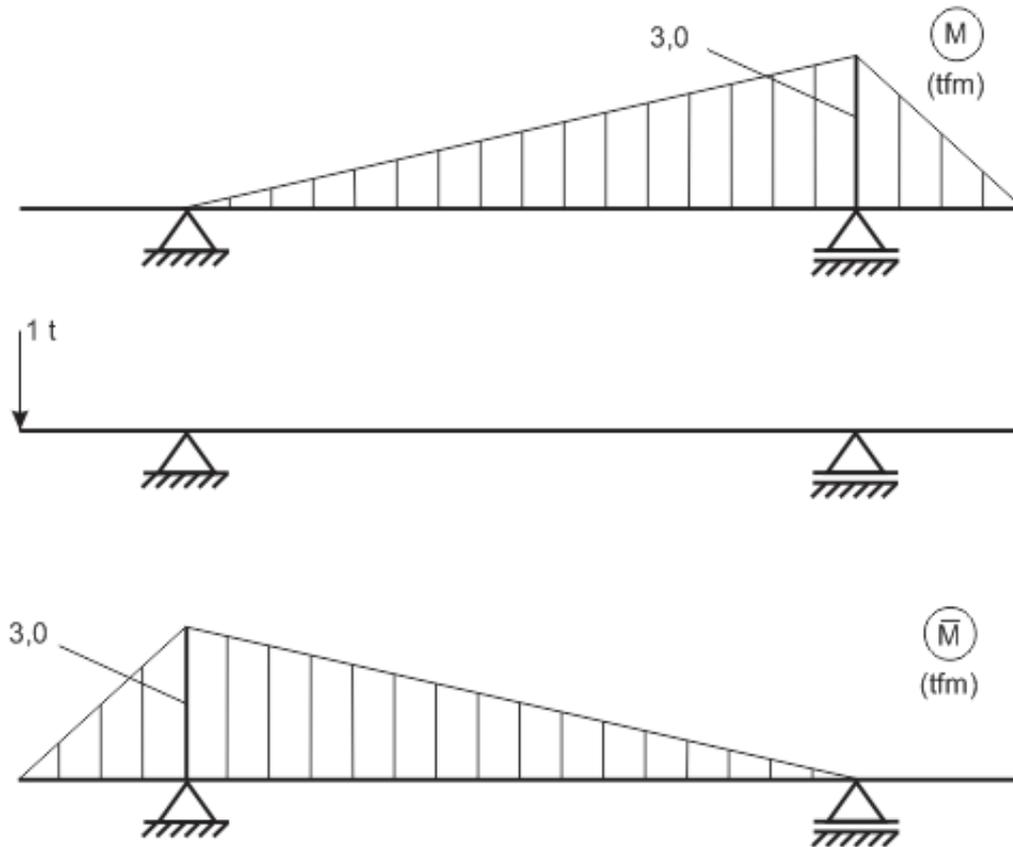
**Figura 15** – Viga biapoiada com balanços  
**Organização:** Autor

Na tabela 5 são apresentados os cálculos da viga da figura 15, dividida em 12 partes iguais, com seus momentos fletores correspondentes apresentados na figura 16.

**Tabela 5-** Valores obtidos numericamente para divisão em 12 partes

MÍSULA RETA SIMÉTRICA											
h1= 0,8		L= 12		n= 12		Δx= 1		Mb= 3			
h2= 1,4		E= 2,10E+06		b= 0,3		E <sub>lc</sub> = 2,69E+04					
						SIMPSON (Δx=L/2m)		SIMPSON (Δx=L/3m)		TRAPEZIOS (Δx=L/m)	
SEÇÃO	h	lc/l	M	m	η	k	k <sub>η</sub>	k	k <sub>η</sub>	k	k <sub>η</sub>
0	1,400000	0,186589	0,000	-3,000	0,000000	1	0,000000	1	0,000000	1	0,000000
1	1,200000	0,296296	-0,250	-2,750	0,203704	4	0,814815	3	0,611111	2	0,407407
2	1,000000	0,512000	-0,500	-2,500	0,640000	2	1,280000	3	1,920000	2	1,280000
3	0,800000	1,000000	-0,750	-2,250	1,687500	4	6,750000	2	3,375000	2	3,375000
4	0,800000	1,000000	-1,000	-2,000	2,000000	2	4,000000	3	6,000000	2	4,000000
5	0,800000	1,000000	-1,250	-1,750	2,187500	4	8,750000	3	6,562500	2	4,375000
6	0,800000	1,000000	-1,500	-1,500	2,250000	2	4,500000	2	4,500000	2	4,500000
7	0,800000	1,000000	-1,750	-1,250	2,187500	4	8,750000	3	6,562500	2	4,375000
8	0,800000	1,000000	-2,000	-1,000	2,000000	2	4,000000	3	6,000000	2	4,000000
9	0,800000	1,000000	-2,250	-0,750	1,687500	4	6,750000	2	3,375000	2	3,375000
10	1,000000	0,512000	-2,500	-0,500	0,640000	2	1,280000	3	1,920000	2	1,280000
11	1,200000	0,296296	-2,750	-0,250	0,203704	4	0,814815	3	0,611111	2	0,407407
12	1,400000	0,186589	-3,000	0,000	0,000000	1	0,000000	1	0,000000	1	0,000000
						Σ=	47,689630	Σ=	41,437222	Σ=	31,374815
						E <sub>lc</sub> δ <sub>θ</sub> A=	15,896543	E <sub>lc</sub> δ <sub>θ</sub> A=	15,538958	E <sub>lc</sub> δ <sub>θ</sub> A=	15,687407
						δ <sub>θ</sub> A=	5,9139E-04	δ <sub>θ</sub> A=	5,7809E-04	δ <sub>θ</sub> A=	5,8361E-04

**Organização:** Autor



**Figura 16** – Diagramas do momento fletor  
**Organização:** Autor

Na tabela 6 é apresentado um resumo de resultados da rotação da tangente à elástica no ponto A, para 6, 12, 18 e 24 divisões da viga do vão central.

Tabela 6- Resumo de valores obtidos numericamente

MÍSULA RETA ASSIMÉTRICA			
h1=0,8 m	L=12 m	Mb=3 tfm	
h2=1,4 m	b=0,3 m	E=2,10 E+06	tf/m2
		$\delta\theta_A$ [rad] E-04	
	TRAPEZIOS	SIMPSON	SIMPSON
INTERVALOS	( $\Delta x=L/m$ )	( $\Delta x=L/2m$ )	( $\Delta x=L/3m$ )
6 ( $\Delta x=2$ )	5,6027	5,4861	5,6752
12 ( $\Delta x=1$ )	5,8361	5,9139	5,7809
18 ( $\Delta x=2/3$ )	5,9121	5,8688	5,9508
24 ( $\Delta x=1/2$ )	5,7856	5,7688	5,7694

**Organização:** Autor

O deslocamento calculado via integração analítica não foi realizado, pois neste caso já se torna bastante trabalhoso.

## Conclusões

Pode-se observar que a medida que a estrutura tem mais barras com momento de inércia variável a solução via integração analítica tende a ser mais trabalhosa, e ainda, sem contar com outros carregamentos que poderão estar atuando ao longo dessas barras. O cálculo de deslocamentos em estruturas isostáticas com barras de momento de inércia variável, pode ser realizada utilizando-se integração numérica com bastante eficiência e aproximação, dependerá apenas do número de divisões necessárias para atingir tais resultados. Esses cálculos podem ser facilmente realizados com a ajuda de uma planilha eletrônica ou com a implementação de um programa para computador, que poderá considerar situações mais abrangentes, superando assim, as limitações das tabelas existentes.

## Referências

BEER, F. P.; JOHNSTON JÚNIOR., E. R.; DEWOLF, J. T. **Resistência dos materiais**. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.

CRAING JÚNIOR, R. R. **Mecânica dos materiais**. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

GULDAN, R. **Estructuras aperticadas y vigas continuas**. Buenos Aires: El Ateneo, 1956.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

MARTHA, L. F. **Análise de estruturas**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.

POLILLO, A. **Exercícios de hiperestática**. Rio de Janeiro: Científica, 1982.

RILEY, W. F.; STURGES, L. D.; MORRIS, D. H. **Mecânica dos materiais**. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

ROCHA, A. M. **Teoria e prática das estruturas**. Rio de Janeiro: Científica, 1973.

SORIANO, H. L.; LIMA, S. S. **Análise de estruturas**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2004.

SÜSSEKIND, J. C. **Curso de análise estrutural**. Rio de Janeiro: Globo, 1983.

TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. E. **Mecânica dos sólidos**. Rio de Janeiro: LTC, 1994.