

## **TRATAMENTO MATRICIAL DO PROCESSO DE CROSS APLICADO A ESTRUTURAS RETICULADAS PLANAS**

## **TRATAMIENTO MATRICIAL DEL PROCESO DE CROSS APLICADO A ESTRUCTURAS RETICULADAS PLANAS**

**EDSON TEJERINA CALDERÓN**

Doutor em Engenharia Civil e Professor da Universidade Estadual de Goiás - UEG,  
Campus Central, Anápolis - GO  
edson.calderon@ueg.br

**ITANO ARRUDA NUNES NETO**

Graduado em Engenharia Civil pela Universidade Estadual de Goiás - UEG,  
Campus Central, Anápolis - GO  
itano\_nunes@hotmail.com

**Resumo:** O processo numérico de Cross, famoso e amplamente utilizado até o fim dos anos setenta, aproximadamente, nos cálculos de projetos estruturais, pela sua simplicidade, do ponto de vista matemático, tomando-se em conta a dificuldade que representava a resolução de sistemas de equações, ainda é ensinado nas disciplinas de Teoria das Estruturas na maioria das universidades do país, sendo a justificativa para tal prática, segundo Martha (2010), mesmo com a pouca utilidade do processo na atual fase da engenharia, é o forte apelo didático que ele possui no ensino do comportamento de estruturas reticuladas planas submetidas a flexão. Este trabalho apresenta uma outra alternativa de resolução do processo de Cross através de um tratamento matricial de suas etapas de resolução, possibilitando ainda a sua automatização do cálculo dos esforços em vigas e pórticos planos quando submetidos a ações externas, sendo facilmente generalizada para outros tipos de ações. A formulação matricial de todas as etapas do processo é exposta e analisada posteriormente, dando a possibilidade da elaboração de um algoritmo para um programa de computador que faça a automatização das iterações. São apresentados exemplos de estruturas cujos resultados são comparados com os resultados obtidos da forma tradicional de resolução pelo Método dos Deslocamentos.

**Palavras-chave:** Cross, Análise matricial, Processo iterativo.

**Resumen:** El proceso numérico de Cross, famoso y muy utilizado hasta finales de los años setenta, aproximadamente, en los cálculos de proyectos estructurales, debido a su simplicidad, desde el punto de vista matemático, teniendo en cuenta la dificultad que representaba en la resolución de sistemas de ecuaciones, aún se imparte en las materias de Teoría de Estructuras en la mayoría de las universidades del país, y la justificación para esta práctica, según Martha (2010), aún con la poca utilidad del proceso en la actual fase de la ingeniería, es la fuerte didáctica atractivo que tiene en la enseñanza del comportamiento de estructuras reticulares planas sometidas a flexión. Este trabajo presenta otra alternativa para la resolución del proceso Cross a través de un tratamiento matricial de sus etapas de resolución, permitiendo además automatizar el cálculo de esfuerzos en vigas y pórticos planos al ser sometidos a acciones externas, siendo fácilmente generalizada para otro tipo de acciones. La formulación matricial de todas las etapas del proceso es expuesta y analizada posteriormente, dando la posibilidad de la elaboración de un algoritmo para un programa de computador que haga la automatización de las iteraciones. Son presentados ejemplos de estructuras cuyos resultados son comparados con los resultados obtenidos de la forma tradicional de resolución mediante el Método del Desplazamiento.

**Palabras clave:** Cross, Análisis matricial, Proceso iterativo.

## Introdução

A forma como as estruturas se comportam quando submetidas a ações é de fundamental importância para o engenheiro civil, principalmente na fase de concepção de um projeto estrutural, em que são predefinidas as posições de elementos estruturais como pilares e vigas. A avaliação das posições desses elementos em um projeto de estruturas é baseada no julgamento do projetista, que leva em conta todo seu conhecimento de teoria das estruturas para estimar e ponderar as necessidades e viabilidades desses elementos no projeto antes da fase de análise estrutural.

A análise estrutural, segundo Martha (2010), é a fase do projeto em que é feita a idealização do comportamento da estrutura. De forma geral, o objetivo da análise estrutural é determinar esforços internos e externos (solicitações e reações de apoio), e as suas correspondentes tensões, bem como os deslocamentos e correspondentes deformações da estrutura que está sendo projetada. Essa análise deve ser feita para os possíveis estágios de carregamentos e solicitações que devem ser previamente determinados.

A programação auxilia o engenheiro a desenvolver a capacidade de resolver grandes problemas dividindo-os em outros de menor complexidade e estruturando procedimentos e rotinas para a solução destes. Essa contribuição por si só possui enorme relevância na otimização do tempo gasto em cálculos e raciocínios aplicados à engenharia, porém a automatização desses cálculos traz ao engenheiro a possibilidade de resolver problemas praticamente insolúveis manualmente.

A tecnologia proporciona o uso de computadores para cálculos, que os analistas estruturais utilizam para facilitar e melhorar o processo de análise de estruturas de forma produtiva e segura. O objetivo da análise matricial de estruturas é de automatizar os procedimentos de cálculo dos dois grandes métodos da Teoria das Estruturas: o Métodos dos

Esforços<sup>1</sup> e o Método dos Deslocamentos<sup>2</sup>, para auxiliar na fase de projeto correspondente à análise estrutural.

Segundo Lopes *et al.* (2005) em publicação ao Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia - COBENGE, na década de 1960, com o surgimento de computadores e automatização de cálculos, o Método dos Deslocamentos, por meio de enfoque matricial, foi tomado como o mais eficiente, em termos de implementação computacional, em relação aos outros da época. Os demais métodos e técnicas tradicionais utilizados até então, como o Processo de Cross, foram suplantados por serem considerados pouco produtivos em termos de programação. Infelizmente esta eficiência computacional não contribuiu da forma esperada para o entendimento dos conceitos da Teoria das Estruturas por parte dos alunos de graduação em Engenharia.

A análise matricial do Método da Rigidez (MOREIRA, 1977) proporciona boa adaptação à linguagem de computador, pois salta partes fatídicas de cálculo através da automatização da resolução de sistemas lineares. Contudo essa boa adaptação não apresenta para o usuário, no caso estudantes de cursos de engenharia, uma visualização e entendimento do comportamento gradual da estrutura quando submetida a carregamentos.

A falta de conhecimento e sensibilidade desse comportamento da estrutura quando submetida a carregamentos acarreta uma série de dificuldades para o engenheiro, que necessita de tais conhecimentos para boa compreensão de muitos conceitos e critérios relativos à boa elaboração de projetos estruturais.

Essa problemática levanta a questão que a instrução dos programas introduzidos nos cursos de análise estrutural é geralmente limitada apenas à determinação de respostas finais (FERRO, 2001). Isso faz com que alguns detalhes sobre a análise passem despercebidos, fazendo do programa uma verdadeira “caixa preta” que o aluno não compreende corretamente o funcionamento e obtenção dos resultados (O’NEILL *et al.*, 1995 apud LOPES *et al.*, 2005).

---

<sup>1</sup> Método dos Esforços, das Forças ou da Flexibilidade é o grande método da hiperestática que utiliza a matriz de flexibilidade para o cálculo dos esforços de uma estrutura (SÜSSEKIND, 1993).

<sup>2</sup> Método dos Deslocamentos, também conhecido como Método da Rigidez, do Equilíbrio ou das Deformações, é o segundo grande método da Teoria das Estruturas que utiliza a matriz de rigidez para o cálculo dos deslocamentos nodais de uma estrutura (SÜSSEKIND, 1991).

Uma das principais características do Processo de Cross no ensino da Teoria das Estruturas, nos dias de hoje, é proporcionar ao aluno de engenharia uma alternativa didática e intuitiva de visualizar o comportamento das estruturas em relação às ações atuantes, aos seus vínculos, à rigidez e posição de cada um dos seus elementos.

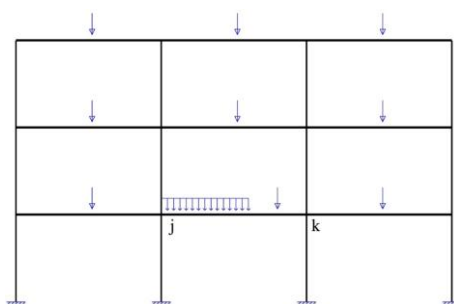
Com base neste e nos argumentos anteriores, o presente trabalho propõe o tratamento matricial, com vias a sua implementação computacional, do Processo de Cross, aplicado a vigas e pórticos planos indeslocáveis.

## Metodologia

Uma estrutura reticulada é constituída por membros retos (sem curvatura), cuja dimensão do comprimento é muito maior quando comparada com as dimensões de sua seção transversal.

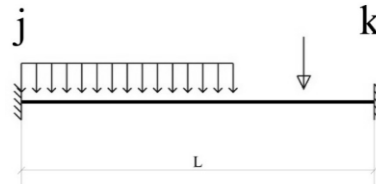
Segundo Gere e Weaver (1965), quando uma estrutura é solicitada por forças, os membros desta estrutura sofrem pequenas mudanças na forma (deformações) e, como consequência, pontos dentro da estrutura deslocam-se para novas posições. Um deslocamento é uma translação ou rotação em algum ponto de uma estrutura, causada pelos efeitos acumulados das deformações de todos os elementos. A translação refere-se à distância percorrida por um ponto da estrutura e uma rotação significa a ocorrência de um giro em relação ao posicionamento inicial. Considerando-se uma estrutura (Figura 1), trabalhando sob o regime elástico de tensões, pode-se afirmar que o conjunto de efeitos atuantes em uma barra (Figura 2) da estrutura é igual à soma dos efeitos individuais de cada um deles na barra. Essa afirmação é dita como o princípio da superposição de efeitos e está ilustrada na Figura 3.

Figura 1 - Estrutura Reticulada Plana.



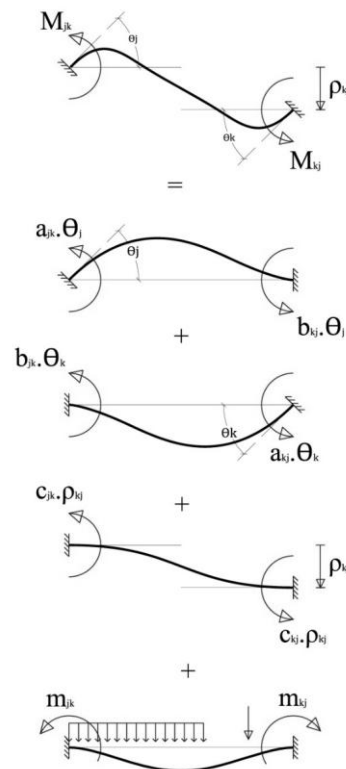
Fonte: Dos próprios autores.

Figura 2 – Barra biengastada jk.



Fonte: Dos próprios autores.

Figura 3 - Análise dos deslocamentos da barra jk.



Fonte: Adaptado de Freitas Neto *et al.*, 1979.

Utilizando-se o princípio de superposição de efeitos, como se observa na Figura 2, no Nó j tem-se:

$$M_{jk} = m_{jk} + a_{jk} \cdot \theta_j + b_{jk} \cdot \theta_k + c_{jk} \cdot \rho_{kj} \quad (1)$$

Sendo:

$$b_{jk} = b_{kj} = a_{jk} \cdot t_{jk} \quad (2)$$

Logo:

$$M_{jk} = m_{jk} + a_{jk} \cdot \theta_j + a'_{jk} \cdot t_{jk} \cdot \theta_k + c_{jk} \cdot \rho_{kj} \quad (3)$$

Sendo  $a_{jk}$ ,  $b_{jk}$  e  $c_{jk}$  os fatores de forma de 2ª espécie. Conforme Freitas Neto *et al.* (1979) essa conclusão pode ser estendida a barras engastadas apoiadas, ou, em outras palavras, aos fatores de forma derivados  $a'_{jk}$  e  $c'_{jk}$ . Os fatores de forma são expressos da seguinte forma:

$$a_{jk} = \frac{4EI_c}{L'} \quad (4)$$

$$b_{jk} = \frac{2EI_c}{L'} \quad (5)$$

$$a'_{jk} = \frac{3EI_c}{L'} \quad (6)$$

$$c_{jk} = \frac{6EI_c}{LL'} \quad (7)$$

$$c'_{jk} = \frac{3EI_c}{LL'} \quad (8)$$

Sendo:

$E$  → Módulo de elasticidade longitudinal da barra.

$I_c$  → Momento de Inércia de comparação da estrutura.

$L$  → Comprimento real da barra.

$L'$  → Comprimento elástico da barra.

O comprimento elástico é definido como:

$$L' = \frac{I_c}{I} L \quad (9)$$

Sendo:

$I \rightarrow$  Momento de Inércia real da barra.

A partir da equação (2), obtêm-se o coeficiente de transmissão (chamado também de fator de transposição)  $t_{jk}$  do nó  $j$  para o nó  $k$ :

$$t_{jk} = \frac{b_{kj}}{a_{jk}} \quad (10)$$

A condição para que uma estrutura seja considerada indeslocável, é que os deslocamentos ortogonais recíprocos sejam nulos, ou seja:

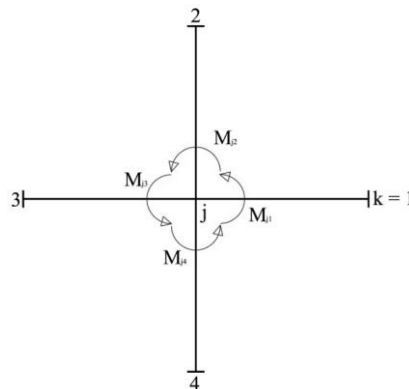
$$\rho_{kj} = 0 \quad (11)$$

Logo a equação 3, fica:

$$M_{jk} = m_{jk} + a_{jk} \cdot \theta_j + a_{jk} \cdot t_{jk} \cdot \theta_k \quad (12)$$

Sendo a barra  $jk$  uma das barras ligadas ao nó  $j$ , como se mostra na Figura 1, tem-se:

Figura 4 – Nós 1, 2, 3 e 4 adjacentes ao nó  $j$ .



Fonte: Adaptado de Freitas Neto *et al.*, 1979.

Aplicando a equação (12) no nó  $j$ , tem-se:

$$M_{j1} = m_{j1} + a_{j1} \cdot \theta_j + a_{j1} \cdot t_{j1} \cdot \theta_1 \quad (13)$$

$$M_{j2} = m_{j2} + a_{j2} \cdot \theta_j + a_{j2} \cdot t_{j2} \cdot \theta_2 \quad (14)$$

$$M_{j3} = m_{j3} + a_{j3} \cdot \theta_j + a_{j3} \cdot t_{j3} \cdot \theta_3 \quad (15)$$

$$M_{j4} = m_{j4} + a_{j4} \cdot \theta_j + a_{j4} \cdot t_{j4} \cdot \theta_4 \quad (16)$$

A condição de equilíbrio do nó  $j$  é dada por:

$$M_{j1} + M_{j2} + M_{j3} + M_{j4} = 0 \quad (17)$$

Logo:

$$\sum_{k=1}^4 m_{jk} + \theta_j \cdot \sum_{k=1}^4 a_{jk} + \sum_{k=1}^4 a_{jk} \cdot t_{jk} \cdot \theta_k = 0 \quad (18)$$

Na primeira aproximação admite-se que as rotações dos nós  $k$  sejam consideradas nulas.

O que equivale a dizer que:

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 0 \quad (19)$$

Com tais considerações a equação (18) pode ser reescrita como:

$$\sum_{k=1}^4 m_{jk} + \sum_{k=1}^4 a_{jk} \cdot \theta_j = 0 \quad (20)$$

$$\theta_j = - \frac{\sum_{k=1}^4 m_{jk}}{\sum_{k=1}^4 a_{jk} \cdot \theta_j} \quad (21)$$

O numerador da equação (21) é chamado de momento de fixação do nó  $j$ , escrito de forma simplificada como:

$$m_j = \sum_{k=1}^4 m_{jk} \quad (22)$$

Desta forma, os momentos iniciais do nó  $j$  ficam sendo:

$$M_{j1}^0 = m_{j1} - a_{j1} \cdot \frac{m_j}{\sum_{k=1}^4 a_{jk}} \quad (23)$$

$$M_{j2}^0 = m_{j2} - a_{j2} \cdot \frac{m_j}{\sum_{k=1}^4 a_{jk}} \quad (24)$$

$$M_{j3}^0 = m_{j3} - a_{j3} \cdot \frac{m_j}{\sum_{k=1}^4 a_{jk}} \quad (25)$$

$$M_{j4}^0 = m_{j4} - a_{j4} \cdot \frac{m_j}{\sum_{k=1}^4 a_{jk}} \quad (26)$$

É definido como coeficiente de distribuição do nó  $j$  na barra  $jk$  a seguinte expressão:



$$d_{jk} = \frac{a_{jk}}{\sum_{k=1}^4 a_{jk}} \quad (27)$$

Sendo que:

$$\sum_{k=1}^4 d_{jk} = 1 \quad (28)$$

Finalmente, os momentos iniciais resultam:

$$M_{j1}^0 = m_{j1} - d_{j1} \cdot m_j \quad (29)$$

$$M_{j2}^0 = m_{j2} - d_{j2} \cdot m_j \quad (30)$$

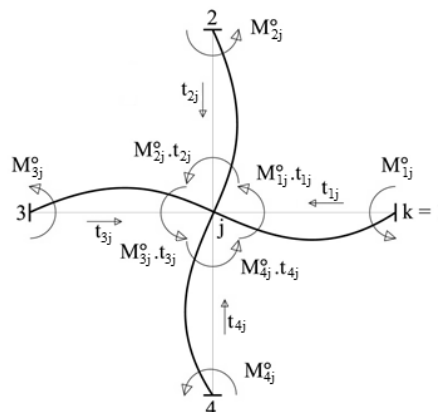
$$M_{j3}^0 = m_{j3} - d_{j3} \cdot m_j \quad (31)$$

$$M_{j4}^0 = m_{j4} - d_{j4} \cdot m_j \quad (32)$$

Nos outros nós da estrutura repete-se o mesmo procedimento encontrando assim uma solução inicial para os momentos fletores nas extremidades de todas as barras, na primeira aproximação.

Voltando ao nó  $j$ , os momentos iniciais nas extremidades  $k$ , isto é,  $M_{1j}^0, M_{2j}^0, M_{3j}^0, M_{4j}^0$ , serão transmitidos para o nó  $j$  através dos coeficientes de transmissão  $t_{kj}$  conforme a Figura 5 (FREITAS NETO *et al.*, 1979).

Figura 5 – Transmissão dos nós  $k$  para o nó  $j$ .



Fonte: Adaptado de Freitas Neto *et al.*, 1979.

No nó  $j$  o momento resultante será:

$$m_j^0 = M_{1j}^0 \cdot t_{1j} + M_{2j}^0 \cdot t_{2j} + M_{3j}^0 \cdot t_{3j} + M_{4j}^0 \cdot t_{4j} \quad (33)$$

Sendo  $m_j^0$  o momento de fixação da primeira aproximação.

A situação anterior se repete e, por um raciocínio idêntico ao que foi feito, ocorrerá uma distribuição deste momento  $m_j^0$  para as extremidades das barras que concorrem no nó  $j$ , através dos coeficientes de distribuição  $d_{jk}$ .

Aplicando-se a superposição de efeitos, obtêm-se uma segunda aproximação de momentos no nó  $j$ , os quais ficam da seguinte forma:

$$M_{j1}^1 = M_{j1}^0 + M_{1j}^0 \cdot t_{1j} - m_j^0 \cdot d_{j1} \quad (34)$$

$$M_{j2}^1 = M_{j2}^0 + M_{2j}^0 \cdot t_{2j} - m_j^0 \cdot d_{j2} \quad (35)$$

$$M_{j3}^1 = M_{j3}^0 + M_{3j}^0 \cdot t_{3j} - m_j^0 \cdot d_{j3} \quad (36)$$

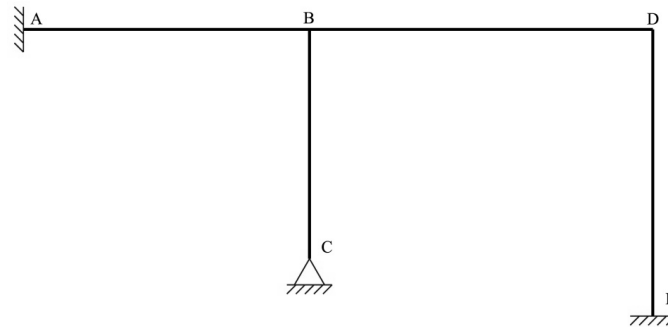
$$M_{j4}^1 = M_{j4}^0 + M_{4j}^0 \cdot t_{4j} - m_j^0 \cdot d_{j4} \quad (37)$$

Realizando-se o mesmo procedimento para os outros nós, obtêm-se os momentos  $M_{1j}^1$ ,  $M_{2j}^1$ ,  $M_{3j}^1$ ,  $M_{4j}^1$ , os quais serão novamente transmitidos para o nó  $j$ . Continuando com o procedimento, obtêm-se novos valores para  $M_{1j}^2$ ,  $M_{2j}^2$ ,  $M_{3j}^2$ ,  $M_{4j}^2$  de forma iterativa, até que se consiga a aproximação desejada  $n$ , para os valores  $M_{1j}^n$ ,  $M_{2j}^n$ ,  $M_{3j}^n$ ,  $M_{4j}^n$ .

### Tratamento matricial do processo de Cross

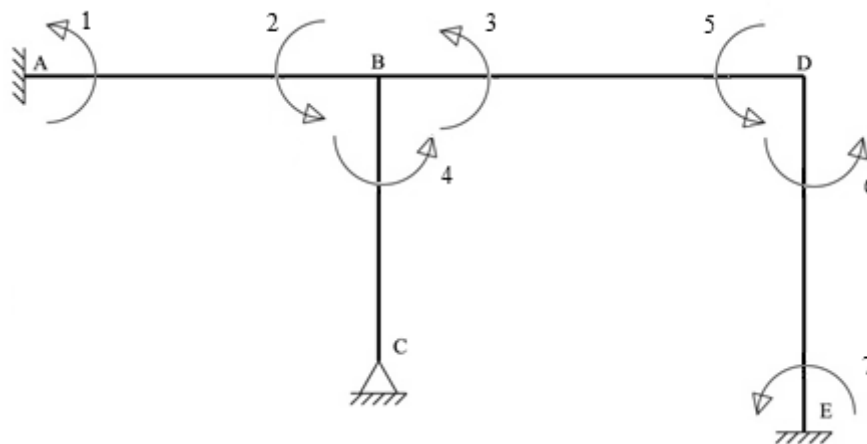
A análise matricial do Processo de Cross aplicado a estruturas apenas com deslocabilidade interna ou rotacional (Figura 6) é realizada segundo a proposta apresentada por Freitas Neto *et al.* (1979). No Processo de Cross, procura-se obter os momentos incógnitos nas extremidades das barras. Para isto é necessário adotar um sistema de coordenadas para determinar de forma ordenada e unívoca a posição e sentido desses momentos, os quais, no presente trabalho, são considerados como positivos no sentido anti-horário, conforme se indica na Figura 7.

Figura 6 - Exemplo de estrutura indeslocável.



Fonte: Dos próprios autores.

Figura 7 - Sistema de Coordenadas para a estrutura da Figura 6.



Fonte: Dos próprios autores.

### Matriz de distribuição

A matriz de distribuição  $[D]$  é composta pelos coeficientes de distribuição  $d_{jk}$ , a sua função é distribuir os momentos de fixação dos nós nas suas barras adjacentes, procurando o equilíbrio dos mesmos. A formulação dessa matriz é análoga à formulação da tradicional matriz de incidência (MOREIRA, 1977). Para o caso da estrutura da Figura 7 fica:

$$[D]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_{BA} & -d_{BA} & -d_{BA} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_{BC} & -d_{BC} & -d_{BC} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_{BD} & -d_{BD} & -d_{BD} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{DB} & -d_{DB} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{DE} & -d_{DE} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### Matriz de transmissão

A matriz de transmissão  $[T]$ , chamada também de matriz de transporte ou transposição, é composta pelos coeficientes de transmissão  $t_{jk}$  que tem como função, propagar aos nós das extremidades opostas das barras, os efeitos dos momentos distribuídos pela matriz de distribuição  $[D]$  (FREITAS NETO *et al.*, 1979). No caso da estrutura da Figura 7, tem-se:

$$[T]=\begin{bmatrix} 0 & t_{BA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_{AB} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{BD} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{BD} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{ED} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{DE} & 0 \end{bmatrix}$$

### Vetor dos momentos de engastamento perfeito

O vetor  $\{M_o\}$  é o vetor constituído pelos Momentos de Engastamento Perfeito da estrutura, de acordo com Freitas Neto *et al.* (1979). Esses momentos também são chamados de Fatores de Carga de 2ª Espécie ou fatores de rigidez. Para o caso da Figura 7, esse vetor é:

$$\{M_o\}=\begin{Bmatrix} m_{AB} \\ m_{BA} \\ m'_{BC} \\ m_{BD} \\ m_{DB} \\ m_{DE} \\ m_{ED} \end{Bmatrix}$$

**Mecanismo de iteração do processo de Cross em estruturas com deslocabilidade exclusivamente rotacional**

O desenvolvimento do processo iterativo será feito exatamente como preconiza Cross (1930).

1) Estando, inicialmente, todos os nós bloqueados, os momentos serão:

$$\{\mathbf{M}_0\}$$

2) Libertando simultaneamente todos os nós, surgem os momentos equilibrantes:

$$\{\mathbf{M}_1\}=[\mathbf{D}]\{\mathbf{M}_0\}$$

3) Transmitindo os efeitos para as extremidades opostas, tem-se:

$$\{\mathbf{M}_2\}=[\mathbf{T}]\{\mathbf{M}_1\}=[\mathbf{T}][\mathbf{D}]\{\mathbf{M}_0\}$$

4) Distribuindo novamente, resulta:

$$\{\mathbf{M}_3\}=[\mathbf{D}]\{\mathbf{M}_2\}=[\mathbf{D}][\mathbf{T}][\mathbf{D}]\{\mathbf{M}_0\}$$

5) Transmitindo mais uma vez:

$$\{\mathbf{M}_4\}=[\mathbf{T}]\{\mathbf{M}_3\}=[\mathbf{T}][\mathbf{D}][\mathbf{T}][\mathbf{D}]\{\mathbf{M}_0\}$$

6) Prosseguindo com a distribuição, tem-se:

$$\{\mathbf{M}_5\}=[\mathbf{D}]\{\mathbf{M}_4\}=[\mathbf{D}][\mathbf{T}][\mathbf{D}][\mathbf{T}][\mathbf{D}]\{\mathbf{M}_0\}$$

E assim segue sucessivamente, distribuindo os momentos com índices ímpares e transmitindo os momentos com índices pares. Efetuando-se a somatória desses momentos (FREITAS NETO *et al.*, 1979), para obter-se os momentos finais  $\{\mathbf{M}\}$ , resulta:

$$\{\mathbf{M}\}=\sum_{i=0}^{\infty}\{\mathbf{M}_i\}=\{\mathbf{M}_0\}+[\mathbf{D}]\{\mathbf{M}_0\}+[\mathbf{T}][\mathbf{D}]\{\mathbf{M}_0\}+[\mathbf{D}][\mathbf{T}][\mathbf{D}]\{\mathbf{M}_0\}+[\mathbf{T}][\mathbf{D}][\mathbf{T}][\mathbf{D}]\{\mathbf{M}_0\}+\dots$$

Considerando-se o produto matricial  $[\mathbf{T}][\mathbf{D}]=[\mathbf{Q}]$ , e a Matriz Identidade de  $[\mathbf{I}]$ , obtêm-se:

$$\{\mathbf{M}\}=(\mathbf{I}+[\mathbf{D}])(\mathbf{I}+[\mathbf{Q}]+[\mathbf{Q}]^2+[\mathbf{Q}]^3+\dots+[\mathbf{Q}]^n)\{\mathbf{M}_0\} \quad (38)$$

Na da equação (38), a matriz  $[\mathbf{Q}]$  tem seus valores menores que a unidade e o segundo termo entre parênteses, constitui uma série geométrica de matrizes cuja razão  $[\mathbf{Q}]$  tem seus elementos menores que a unidade, o que justifica a convergência do Processo de Cross segundo

Freitas Neto *et al.* (1979) e Moreira (1977). Ainda, segundo West (1980), devido a essa convergência que apresenta o processo de distribuição de momentos, a equação (38) converge a uma solução exata dos momentos finais, dada por:

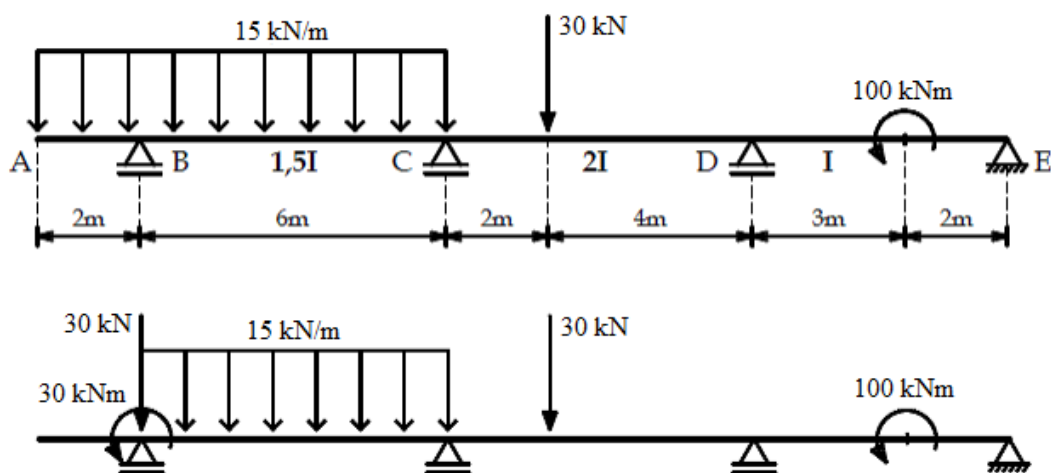
$$\{M\} = ([I] + [D])([I] - [Q])^{-1}\{M_0\} \quad (39)$$

O que mostra que a série geométrica de matrizes da equação (38) pode ser obtida através da inversão da matriz da diferença entre  $[I]$  e  $[Q]$ .

## Resultados e discussão

### Exemplo 1: Viga contínua submetida a carga externa.

Figura 8 – Viga contínua.

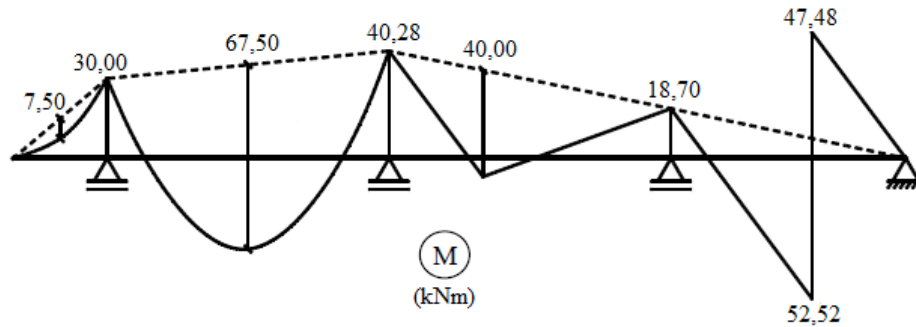


Fonte: Dos próprios autores.

A viga mostrada na Figura 8, resolvida pelo Método dos Deslocamentos em Calderón *et al.*, (2011), apresenta resultados dos momentos finais nos nós C e D (Expressão 40), os quais permitem o traçado do seu diagrama do momento fletor, mostrado na Figura 9.

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_{CB} \\ M_{CD} \\ M_{DC} \\ M_{DE} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -40,28 \\ 40,28 \\ -18,70 \\ 18,70 \end{Bmatrix} \quad (40)$$

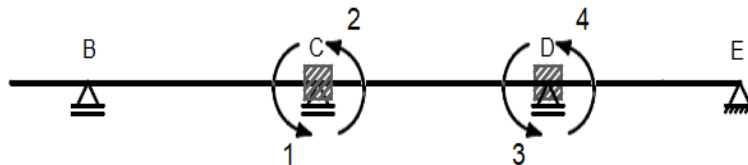
Figura 9 – Diagrama do momento fletor da viga da contínua.



Fonte: Dos próprios autores.

Para resolver estrutura da Figura 8 pelo Processo de Cross de forma matricial é utilizado o sistema de coordenadas indicado na Figura 10.

Figura 10 – Sistema de coordenadas da viga da contínua.



Fonte: Dos próprios autores.

a) Matriz de Distribuição

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} -0,360 & -0,360 & 0 & 0 \\ -0,640 & -0,640 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,690 & -0,690 \\ 0 & 0 & -0,310 & -0,310 \end{bmatrix}$$

Obtenção dos principais termos da Matriz  $[\mathbf{D}]$ :

$$d_{11} = d_{12} = \frac{3/4}{3/4 + 4/3} = 0,360$$

$$d_{22}=d_{21}=\frac{4/3}{3/4+4/3}=0,640$$

$$d_{33}=d_{34}=\frac{4/3}{4/3+3/5}=0,690$$

$$d_{44}=d_{34}=\frac{3/5}{4/3+3/5}=0,310$$

b) Matriz de Transmissão

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obtenção dos principais termos da Matriz  $[\mathbf{T}]$ :

$$t_{23}=\frac{2/3}{4/3}=0,500$$

$$t_{32}=\frac{2/3}{4/3}=0,500$$

c) Vetor dos Momentos de Engastamento Perfeito

$$\{\mathbf{M}_0\} = \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} -52,50 \\ 26,67 \\ -13,33 \\ 26,00 \end{pmatrix}$$

Obtenção dos termos do vetor  $\{\mathbf{M}_0\}$ :

$$m_1 = -\frac{15 \cdot 6^2}{12} + \frac{1}{2}(2 \cdot 0 - 3) = -52,50 \text{ kNm}$$

$$m_2 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 4^2}{6^2} = 26,67 \text{ kNm}$$

$$m_3 = -\frac{3 \cdot 2^2 \cdot 4}{6^2} = -13,33 \text{ kNm}$$



$$m_4 = \frac{(-10)}{2} \left( \frac{3 \cdot 2^2}{5^2} - 1 \right) = 26,00 \text{ kNm}$$

d) Produto Matricial  $[T][D] = [Q]$

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,345 & -0,345 \\ -0,320 & -0,320 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e) Matriz Identidade

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

f) Momentos Finais

$$\{M\} = ([I] + [D])([I] + [Q] + [Q]^2 + [Q]^3 + [Q]^4 + [Q]^5)\{M_o\} \quad (41)$$

Aplicando-se a equação (38) e realizando-se as potenciações da matriz  $[Q]$  até a quinta potência, para uma aproximação de duas casas decimais, tem-se:

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_{CB} \\ M_{CD} \\ M_{DC} \\ M_{DE} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -40,28 \\ 40,28 \\ -18,71 \\ 18,71 \end{Bmatrix} \quad (42)$$

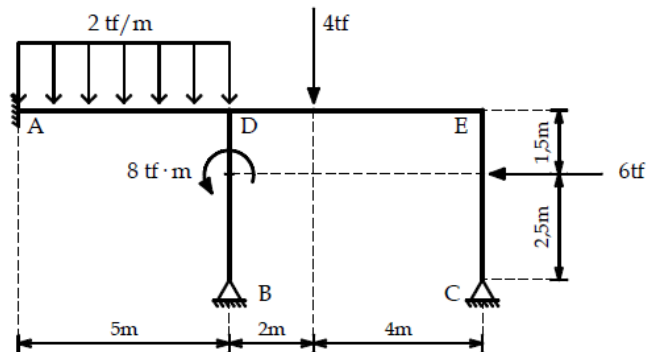
Ainda segundo West (1980) pode-se evitar a potenciação da matriz  $[Q]$ , utilizando a equação (39), obtendo-se os seguintes momentos finais:

$$\{M\} = ([I] + [D])([I] - [Q])^{-1}\{M_o\} = \begin{Bmatrix} M_{CB} \\ M_{CD} \\ M_{DC} \\ M_{DE} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -40,28 \\ 40,28 \\ -18,70 \\ 18,70 \end{Bmatrix} \quad (43)$$

Como está técnica não utiliza diretamente as iterações, foge ao objetivo principal desse trabalho, mas é válida e demonstra de forma matricial o Processo de Cross, podendo ser utilizada apenas para demonstração e conferência dos resultados obtidos, comprovando-se assim, a validade e precisão do mecanismo do Processo de Cross formulado.

**Exemplo 2:** Pórtico indeslocável submetido a carga externa.

Figura 11 – Pórtico indeslocável.



Fonte: Dos próprios autores.

O pórtico mostrado na Figura 11, resolvida pelo Método dos Deslocamentos em Calderón et al., (2011), apresenta resultados dos momentos finais nos nós D e E (Expressão 44), os quais permitem o traçado do seu diagrama do momento fletor, mostrado abaixo.

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_{AD} \\ M_{DA} \\ M_{DB} \\ M_{DE} \\ M_{ED} \\ M_{EC} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 45,33 \\ -34,35 \\ -0,02 \\ 34,37 \\ -29,30 \\ 29,30 \end{Bmatrix}$$

g) Matriz de Distribuição

$$[D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,361 & -0,361 & -0,361 & 0 & 0 \\ 0 & -0,338 & -0,338 & -0,338 & 0 & 0 \\ 0 & -0,301 & -0,301 & -0,301 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,471 & -0,471 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,529 & -0,529 \end{bmatrix}$$

Obtenção dos principais termos da Matriz [D]:

$$d_{22}=d_{23}=d_{24}=\frac{4/5}{4/5+2/3+3/4}=0,361$$

$$d_{44} = d_{42} = d_{43} = \frac{2/3}{4/5 + 2/3 + 3/4} = 0,301$$

$$d_{33} = d_{32} = d_{34} = 1 - (0,361 + 0,301) = 0,338$$

$$d_{55} = d_{56} = \frac{2/3}{2/3 + 3/4} = 0,471$$

$$d_{66} = d_{65} = 1 - (0,471) = 0,529$$

h) Matriz de Transmissão

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 0 & 0,50 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obtenção dos principais termos da Matriz  $[\mathbf{T}]$ :

$$t_{21} = t_{12} = \frac{2/5}{4/5} = 0,500$$

$$t_{45} = t_{54} = \frac{1/3}{2/3} = 0,500$$

i) Vetor dos Momentos de Engastamento Perfeito

$$\{\mathbf{M}_o\} = \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 41,67 \\ -41,67 \\ -6,88 \\ 35,56 \\ -17,78 \\ 45,70 \end{Bmatrix}$$

Obtenção dos principais termos do vetor  $\{\mathbf{M}_o\}$ :

$$m_1 = \frac{20 \cdot 5^2}{12} = 41,67 \text{ kNm}$$

$$m_2 = -\frac{20 \cdot 5^2}{12} = -41,67 \text{ kNm}$$

$$m_3 = \frac{(-80)}{2} \left( \frac{3 \cdot 2,5^2}{4^2} - 1 \right) = -6,88 \text{ kNm}$$

$$m_4 = \frac{40 \cdot 2 \cdot 4^2}{6^2} = 35,56 \text{ kNm}$$

$$m_5 = -\frac{40 \cdot 2^2 \cdot 4}{6^2} = -17,78 \text{ kNm}$$

$$m_6 = \frac{60 \cdot 1,5 \cdot 2,5}{2 \cdot 4^2} (2,5 + 4) = 45,70 \text{ kNm}$$

j) Produto Matricial  $[T][D] = [Q]$

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & -0,180 & -0,180 & -0,180 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,236 & -0,236 \\ 0 & -0,150 & -0,150 & -0,150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz Identidade

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Os momentos finais são obtidos aplicando-se a equação (38) realizando-se as potenciações da matriz  $[Q]$ , para uma aproximação de duas casas decimais, até  $[Q]^5$ , resultando:

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_{AD} \\ M_{DA} \\ M_{DB} \\ M_{DE} \\ M_{ED} \\ M_{EC} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +3,00 \\ -6,49 \\ -2,17 \\ +8,67 \\ -6,74 \\ +6,74 \\ +0,01 \end{Bmatrix}$$

Segundo West (1980), aplicando-se a equação (40), obtêm-se:

$$\{M\} = ([I] + [D]) ([I] - [Q])^{-1} \{M_o\} \quad \left\{ \begin{array}{l} M_{AD} \\ M_{DA} \\ M_{DB} \\ M_{DE} \\ M_{ED} \\ M_{EC} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} +3,00 \\ -6,49 \\ -2,17 \\ +8,67 \\ -6,74 \\ +6,74 \\ +0,01 \end{array} \right\}$$

Cujos resultados, utilizando-se dois dígitos após a vírgula, são praticamente iguais, o que comprova a validade e a precisão do mecanismo do Processo de Cross formulado.

## Conclusões

A partir das comparações feitas, pode-se concluir que o tratamento matricial do Processo de Cross é uma alternativa metodológica eficiente para o cálculo de estruturas reticulares planas indeslocáveis, uma vez que os momentos resultantes obtidos dessa forma convergem para os valores exatos. A convergência para valores exatos, também pode ser provada, a partir da série de geométrica formada pelas matrizes (Equação 38), resultantes das iterações inerentes do processo de Cross.

Pode-se observar que o tratamento matricial do Processo de Cross, pela simplicidade do processo, torna possível a sua implementação computacional, permitindo a consideração de outros tipos de ações, devido a que o Método dos Deslocamentos é bastante adequado para este fim, para tais casos, seria necessário mudar apenas o vetor correspondente às ações  $\{M_o\}$ , ficando os demais cálculos inalterados. A implementação do tratamento matricial do Processo de Cross também pode ser facilmente estendida para estruturas deslocáveis, isto é, para estruturas com um ou mais nós com deslocamentos lineares.

## Referências

CALDERÓN, E. T.; CARVALHO, M. de R. **Teoria das Estruturas: Método dos Deslocamentos**. Goiânia: PUC Goiás, 2011.

CROSS, H. **Analysis of Continuous Frame by Distributing Fixed-End Moments**. In: ANNUAL CONVENTION OF THE AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS, 1930,

Cleveland, Ohio. Proceedings of the american society of civil engineers, Cleveland: ASCE, 1930. p. 919-928.

FERRO, N. C. P.; CHUEIRI, L. H. M.; FRANÇA, A. A. V. **Um Aplicativo Acadêmico para Análise de Estruturas Reticulares Espaciais**. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA - COBENGE, XXIX, 2001, Porto Alegre. Disponível em: < <http://www.abenge.org.br/CobengeAnteriores/2001/trabalhos/MTE121.pdf>> Acesso em: 22 fev. 2014.

FREITAS NETO, J. de A. et. al. **Caderno de Estruturas: Processo de Cross**. v. 6. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 1979.

LOPES, A. P.; CASTRO. L. C. L. B. de; NEVES, C. E. V. **Utilização de Planilhas Eletrônicas no Ensino do Método de Cross**. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA - COBENGE, XXXIII, 2005, Campina Grande. Disponível em: <<http://www.abenge.org.br/CobengeAnteriores/2005/artigos/DF-5-61576751287-1119039207634.pdf>> Acesso em: 22 fev. 2014.

MARTHA, L. F. **Análise de Estruturas: Conceitos e Métodos Básicos**. Rio de Janeiro: Campus, 2010.

MOREIRA, D. F. **Análise Matricial de Estruturas**. Rio de Janeiro: LTC/EDUSP, 1977.

SÜSSEKIND, J. C. **Curso de Análise Estrutural: Método das Deformações e Processo de Cross**. v. 3. Porto Alegre: Globo, 1991.

SÜSSEKIND, J. C. **Curso de Análise Estrutural – v.2: Deformações em estruturas. Método das forças**. Editora Globo, 10 ed., São Paulo, 1993.

WEST, H. H. **Analysis of Structures: An integration of classical and modern methods**. 2. Ed. New York: John Wiley & Sons, 1980. 752p.