

## **CÁLCULO DE DESLOCAMENTOS EM VIGAS UTILIZANDO AS TRANSFORMADAS DE LAPLACE**

## **CÁLCULO DE DESPLAZAMIENTOS EN VIGAS UTILIZANDO LAS TRANSFORMADAS DE LAPLACE**

**EDSON TEJERINA CALDERÓN**

Doutor em Engenharia Civil e Professor da UEG - Universidade Estadual de Goiás,  
Campus Central, Anápolis - GO  
edson.calderon@ueg.br

**ELLEN BONFIM DE SOUZA**

Graduado em Engenharia Civil pela UEG - Universidade Estadual de Goiás,  
Campus Central, Anápolis - GO  
ellenbonfimdesouza12@gmail.com

**Resumo:** Os vários tipos de problemas que surgem no estudo da Física, Engenharia e outras áreas, envolvem equações compostas por funções e derivadas dessas funções, chamadas de equações diferenciais, as quais são ainda objeto de estudo por um ramo das matemáticas, devido ao grande número de aplicações que dependem da sua resolução. Embora já existam métodos para resolver essas equações, seja de forma analítica ou numérica, as Transformadas de Laplace, podem representar uma alternativa de resolução dessas equações. Na Engenharia Civil, no caso de estruturas compostas por peças estruturais lineares, as deflexões das mesmas são governadas por equações diferenciais ordinárias de 4ª ordem, podendo-se então, utilizar as Transformadas de Laplace para determinar as equações das linhas elásticas dessas peças estruturais e assim poder calcular os deslocamentos ao longo de toda a estrutura. As Transformadas de Laplace, além de ter muitas outras aplicações, são bastante apropriadas para resolver equações diferenciais, fazendo com que elas se tornem simples equações algébricas, facilitando assim, a sua resolução. Para demonstrar a eficiência da aplicação das Transformadas de Laplace, exemplos são realizados e comparados com os obtidos da forma tradicional.

**Palavras-chave:** Deformação. Equações diferenciais. Transformadas de Laplace. Vigas.

**Resumen:** Los diversos tipos de problemas que surgen en el estudio de Física, Ingeniería y otras áreas, involucran ecuaciones compuestas por funciones y sus derivadas, llamadas ecuaciones diferenciales, las cuales son aún objeto de estudio en una rama de las matemáticas, debido a la gran cantidad de aplicaciones que dependen de su resolución. Si bien ya existen métodos para resolver estas ecuaciones, ya sea en su forma analítica o numérica, las Transformadas de Laplace pueden representar una alternativa para la resolución de esas ecuaciones. En Ingeniería Civil, en el caso de estructuras compuestas por elementos estructurales lineales, sus deflexiones se rigen por ecuaciones diferenciales ordinarias de cuarta orden. Las Transformadas de Laplace pueden utilizarse para determinar las ecuaciones de las líneas elásticas de esos elementos estructurales y, por lo tanto, calcular los desplazamientos a lo largo de la estructura. Las Transformadas de Laplace, además de tener muchas otras aplicaciones, son muy adecuadas para resolver ecuaciones diferenciales, transformándolas en ecuaciones algebraicas simples, lo que facilita su resolución. Para demostrar la eficiencia de la aplicación de las Transformadas de Laplace, ejemplos son realizados y comparados con los obtenidos de forma tradicional.

**Palabras clave:** Deformación. Ecuaciones diferenciales. Transformadas de Laplace. Vigas.

## Introdução

A Matemática teve grandes avanços nos séculos 17 e 18, quando surgiram personagens importantes cujos trabalhos contribuíram para o estudo das ciências em todos os âmbitos, como os trabalhos de René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665), que uniram a Álgebra e Geometria num mesmo ambiente formando a Geometria Analítica (Boyer, 2012), e os trabalhos de Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), considerados como os criadores do Cálculo Diferencial e a sua relação com o Cálculo Integral (ANTON, et al., 2012), permitindo assim, o estudo de fenômenos inerentes às ciências exatas e da natureza, biomédicas ou sociais aplicadas, tendo ainda presença quase indispensável no âmbito das áreas que se ocupam predominantemente da geração de tecnologias. E assim, logo que surgiram as Equações Diferenciais Ordinárias, ocupando o seu lugar de importância nas pesquisas matemáticas, já que elas permitem modelar os fenômenos da natureza e entender as suas funções, os seus comportamentos e até dar a possibilidade de fazer previsões dos mesmos, fornecendo assim, valiosas informações.

Um matemático, astrônomo e estatístico francês dessa época, autor de vários trabalhos importantes, foi Pierre-Simon, Marquês de Laplace (1749-1847), quem utilizou Equações Diferenciais em suas pesquisas sobre o movimento dos planetas ao redor de uma estrela, assim como outros fenômenos vistos no Universo. As suas principais contribuições na matemática foram: a Equação de Laplace para potenciais elétricos e mecânicos, o Operador Diferencial Laplaciano e a Transformada de Laplace. Sendo esta última, justamente utilizada para facilitar a resolução de problemas envolvendo Equações Diferenciais Ordinárias. Desde essa época até os dias atuais, a sua transformada tem se mostrado uma poderosa ferramenta na solução de Equações Diferenciais não só na Matemática, mas também em outros campos da ciência, como a Física, a Engenharia e outros.

Neste trabalho, é utilizada a Transformada de Laplace (SPIEGEL, 1971) para resolver a Equação Diferencial da Linha Elástica de uma viga, como uma alternativa para resolução de Equações Diferenciais Ordinárias (ZILL, 2001), visto que a resolução por outros

métodos como a da variação dos parâmetros, utilizando séries ou resolvendo-se numericamente, seria bastante trabalhosa. Para isso, é necessário, inicialmente, determinar a equação Diferencial da Linha Elástica de uma viga submetida a um carregamento e realizar o estudo da Transformada de Laplace.

### Equação diferencial da linha elástica de uma viga

Sabe-se que as flechas e declividades ao longo de uma viga que suporta uma carga  $w(x)$  (Figura 1 a), podem ser obtidas a partir da equação da sua linha elástica, representada por uma equação diferencial de segunda ordem (HIBBELER, 2019):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (1)$$

Onde:

$M(x)$  - momento fletor

$E$  - módulo de elasticidade transversal

$I$  - momento de inércia da área da seção transversal

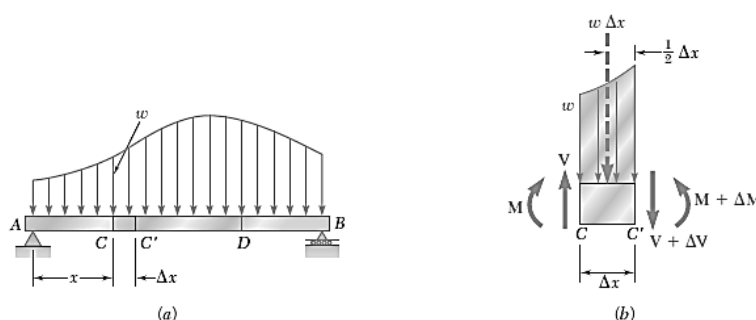


Figura 1- a) Viga com carga distribuída  $w(x)$  contínua; b) Elemento diferencial da viga. Fonte: Autores.

Considerando-se em equilíbrio o elemento diferencial  $\Delta x$  da viga (Figura 1, b), o qual está submetido a uma carga distribuída contínua  $w(x)$ , podem ser obtidas as relações

diferenciais que existem entre a carga  $w(x)$ , a força cortante  $V(x)$  e o momento fletor  $M(x)$ , (BEER et al., 2021), que são:

$$\frac{dV(x)}{dx} = -w(x) \quad (2)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x) \quad (3)$$

Diferenciando-se ambos os membros da equação (1) em relação a  $x$  e considerando que o produto  $EI$  seja constante, tem-se:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{EI} \frac{dM(x)}{dx} = \frac{V(x)}{EI} \quad (4)$$

Diferenciando-se ambos os membros da equação (4), obtêm-se:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{1}{EI} \frac{dV(x)}{dx} \quad (5)$$

Substituindo-se a equação (2) na equação (5), tem-se:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{w(x)}{EI} \quad (6)$$

A equação (6) é uma Equação Diferencial Ordinária de quarta ordem (BRONSON e COSTA, 2008), chamada de Equação Diferencial da Linha Elástica de uma viga submetida a uma carga distribuída  $w(x)$ , a qual pode ser resolvida utilizando-se as Transformadas de Laplace, objetivo do presente trabalho. A equação (1) é normalmente utilizada pelos métodos tradicionais, como é o método da integração direta, que consiste em realizar duas integrações consecutivas, gerando assim duas constantes por cada trecho da viga, as quais são determinadas a partir da aplicação das condições de contorno da viga em questão. Alguns exemplos (NASH, 1982 e NASH, 2001), utilizados para comparar com os resultados obtidos pela aplicação das transformadas de Laplace, são os seguintes:

**Exemplo 1:** Viga engastada com carga distribuída parcial.

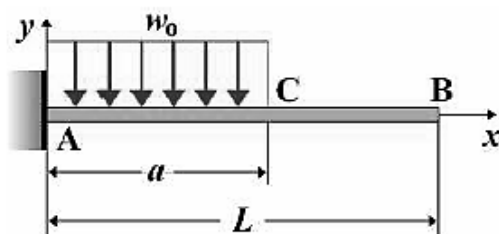


Figura 2 – Viga engastada com carga distribuída parcial. . Fonte: Autores.

$$\text{Trecho AC} \rightarrow y(x) = \frac{w_0}{24EI} (4ax^3 - 6a^2x^2 - x^4) \quad (7)$$

$$\text{Trecho CB} \rightarrow y(x) = \frac{w_0}{24EI} (-4a^3x + a^4) \quad (8)$$

**Exemplo 2:** Viga biapoiada com carga concentrada.

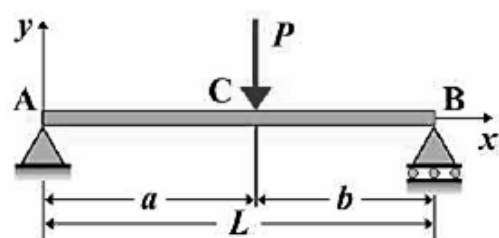


Figura 3 – Viga biapoiada com carga concentrada. Fonte: Autores.

$$\text{Trecho AC} \rightarrow y(x) = \frac{P}{6EIL} (bx^3 - b(L^2 - b^2)x) \quad (9)$$

$$\text{Trecho CB} \rightarrow y(x) = \frac{P}{6EIL} (bx^3 - L(x - a)^3 - b(L^2 - b^2)x) \quad (10)$$

**Exemplo 3:** Viga em balanço com carga linearmente distribuída.

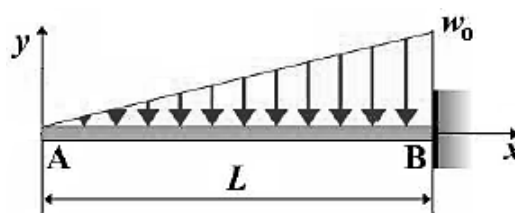


Figura 4 – Viga em balanço com carga linearmente distribuída. Fonte: Autores.

$$\text{Trecho AB} \rightarrow y(x) = -\frac{w_0}{120EIL}(x^5 - 5L^4x + 4L^5) \quad (11)$$

**Exemplo 4:** Viga biapoiada com carga momento.

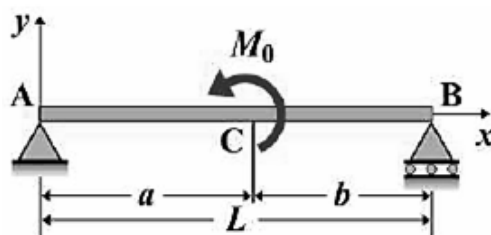


Figura 5 – Viga biapoiada com carga momento. Fonte: Autores.

$$\text{Trecho AC} \rightarrow y(x) = \frac{M_0}{6EIL}(x^3 + 2L^2x - 6Lax + 3a^2x) \quad (12)$$

$$\text{Trecho CB} \rightarrow y(x) = \frac{M_0}{6EIL}(x^3 - 3Lx^2 + 2L^2x + 3a^2x - 3La^2) \quad (13)$$

## A transformada de LAPLACE

Seja  $f(t)$  uma função de  $t$  definida para  $t > 0$ , então, a transformada de Laplace de  $f(t)$ , representada por  $\mathcal{L}[f(t)]$ , é definida por:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s) \quad (14)$$

onde supõe-se que  $s$  seja um parâmetro real. A transformada de Laplace de  $f(t)$  existe se a integral na expressão (14) converge para algum valor de  $s$ , caso contrário, não existe. O símbolo  $\mathcal{L}$  é chamado de operador de transformação de Laplace (SPIEGEL, 1971).

Normalmente são utilizadas letras minúsculas para denotar a função a ser transformada, como  $f(t)$ ,  $g(t)$ ,  $y(t)$ , e letras maiúsculas, como  $F(s)$ ,  $G(s)$ ,  $Y(s)$ , para denotar, respectivamente, suas correspondentes transformadas de Laplace.

A integral da expressão (14) é um tipo de integral imprópria, cujo limite existe e que, por definição, tem pelo menos um dos seus limites de integração ilimitado. Esse tipo de

integrais pode ser resolvida procedendo-se da seguinte forma:

$$\int_0^{\infty} g(t)dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A g(t)dt \quad (15)$$

onde  $g(t)$  é uma função contínua no intervalo  $0 \leq t \leq \infty$ .

Por exemplo, para determinar a transformada de Laplace de uma função  $f(t)=t$ , aplica-se a definição dada em (14), isto é:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = F(s)$$

$$\mathcal{L}[t] = \int_0^{\infty} e^{-st} t dt = \lim_{P \rightarrow \infty} \int_0^P e^{-st} t dt \quad (16)$$

Resolvendo a integral da equação (16), obtêm-se:

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2} \quad (17)$$

Procedendo-se dessa forma, é possível determinar as transformadas de Laplace de outras funções como as indicadas na Tabela 1 (SCHIFF, 1999), necessárias para a aplicação no presente trabalho, onde supõe-se que:  $s > 0$  e que  $n!$  é o fatorial de  $n$ , sendo  $n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times n$ .

Tabela 1 Transformada de Laplace de algumas funções.

	$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$
1	1	$\frac{1}{s}$
2	t	$\frac{1}{s^2}$
3	$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4	$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$
5	$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
6	$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$

Fonte: Autores.

## A transformada inversa de LAPLACE

Se a Transformada de Laplace de uma função  $f(t)$  é  $F(s)$ , ou seja, se  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ , então  $f(t)$  é chamada Transformada Inversa de Laplace de  $F(s)$  e é escrita simbolicamente como  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ , onde  $\mathcal{L}^{-1}$  é chamado de operador da transformada inversa de Laplace.

### Teorema de Lerch

Se a função  $f(t)$  for restrita e seja seccionalmente contínua em todo intervalo finito  $0 \leq t \leq N$  e de ordem exponencial para  $t > N$ , então a transformada inversa de Laplace de  $F(s)$ , isto é,  $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$ , é única.

A Transformada inversa de Laplace também possui a propriedade da linearidade. Se  $c_1$  e  $c_2$  são constantes quaisquer, enquanto  $F_1(s)$  e  $F_2(s)$  são as transformadas de Laplace de  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$ , respectivamente, então:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)\} &= c_1 \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + c_2 \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\} \\ \mathcal{L}^{-1}\{c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)\} &= c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\end{aligned}\tag{18}$$

As transformadas inversas de Laplace são geralmente dispostas em tabelas (SPIEGEL, 1971), algumas delas estão apresentadas na tabela 2.

Tabela 2 Transformada inversa de Laplace de algumas funções.

	$F(s)$	$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$
1	$\frac{1}{s}$	1
2	$\frac{1}{s^2}$	t
3	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\frac{t^n}{n!}$
4	$\frac{1}{s-a}$	$e^{at}$



5	$\frac{1}{s^2 + a^2}$	$\frac{\sin at}{a}$
6	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos at$

. Fonte: Autores.

## Algumas propriedades da transformada de Laplace

### 1 – Propriedade de linearidade

Sendo  $c_1$  e  $c_2$  constantes quaisquer,  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  funções cujas transformadas de Laplace são  $F_1(s)$  e  $F_2(s)$ , respectivamente, então:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] &= c_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + c_2 \mathcal{L}[f_2(t)] \\ \mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] &= c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)\end{aligned}\quad (19)$$

### 2 – Propriedades de translação

$$\begin{aligned}\text{a) Se } \mathcal{L}[f(t)] &= F(s) \quad \text{então:} \\ \mathcal{L}[e^{at} f(t)] &= F(s - a)\end{aligned}\quad (21)$$

$$\begin{aligned}\text{b) Se } \mathcal{L}[f(t)] &= F(s) \quad \text{e} \quad g(t) = \begin{cases} f(t - a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases} \quad \text{então:} \\ \mathcal{L}[g(t)] &= e^{-as} F(s)\end{aligned}\quad (22)$$

Nas propriedades a seguir considera-se que:

$$\text{Se } \mathcal{L}[f(t)] = F(s) \quad \text{então:}$$

### 3 – Propriedade de mudança de escala

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (23)$$

### 4 – Transformada de Laplace de derivadas

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0) \quad (24)$$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) \quad (25)$$

$$\mathcal{L}[f^n(t)] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{n-2}(0) - f^{n-1}(0) \quad (26)$$

## 5 – Transformada de Laplace de integrais

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{F(s)}{s} \quad (27)$$

## 6 – Multiplicação por $t^n$

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) = (-1)^n F^n(s) \quad (28)$$

## 7 – Divisão por $t$

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty f(u)du \quad (29)$$

Sendo necessário a existência do:  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t}$

## Algumas funções especiais da transformada de Laplace

São necessárias a utilização de algumas funções especiais para a representação dos vários tipos de cargas que podem atuar em uma viga.

### 1 – A função degrau unitário

Chamada também de função de Heaviside, representada graficamente na figura 6 a), é definida por:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad (30)$$

Se houver translação na função, mostrada na figura 6 b), fica:

$$u(t - a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases} \quad (31)$$

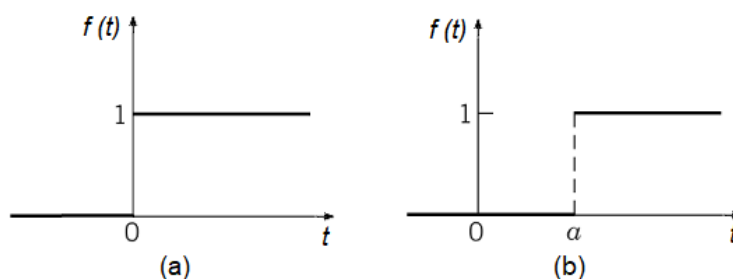


Figura 6 - a) Função degrau unitário; b) Função degrau unitário com atraso  $t=a$ . Fonte: Autores.

A função degrau unitário é utilizada para representar cargas uniformemente distribuídas e as suas transformadas de Laplace são:

$$\mathcal{L}[u(t)] = U(s) = \frac{1}{s} \quad (32)$$

$$\mathcal{L}[u(t - a)] = e^{-as}U(s) = \frac{1}{s}e^{-as} \quad (33)$$

## 2 – A função rampa unitária

A função rampa unitária, representada graficamente na figura 7 a), é definida por:

$$r(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t > 0 \end{cases} \quad (34)$$

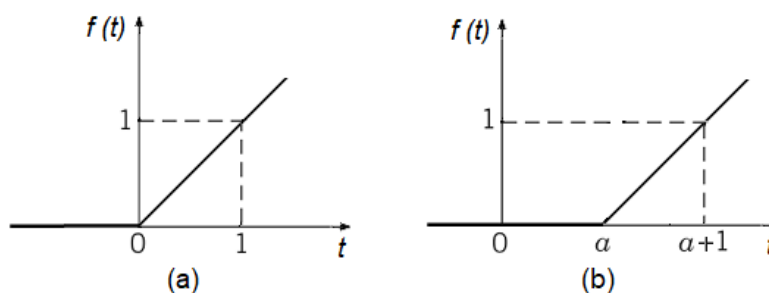


Figura 7 - a) Função rampa unitária; b) Função rampa unitária com atraso  $t=a$ . Fonte: Autores.

No caso de translação, mostrada na figura 7 b), fica:

$$r(t - a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ t - a & t > a \end{cases} \quad (35)$$

A função rampa unitária é utilizada para representar cargas linearmente distribuídas e as suas transformadas de Laplace são:

$$\mathcal{L}[r(t)] = R(s) = \frac{1}{s^2} \quad (36)$$

$$\mathcal{L}[r(t - a)] = e^{-as} R(s) = \frac{1}{s^2} e^{-as} \quad (37)$$

### 3 – A função impulso unitário

A função de impulso unitário, chamada também de função delta de Dirac, denotada como  $\delta(t)$ , é definida como:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \neq 0 \\ \rightarrow \infty & \text{quando } t \rightarrow 0 \end{cases} \quad (38)$$

Com a propriedade de que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (39)$$

A função impulso unitário com atraso é definida como:

$$\delta(t - a) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \neq a \\ \rightarrow \infty & \text{quando } t \rightarrow a \end{cases} \quad (40)$$

As funções impulso unitário com atraso e sem atraso, aproximadas no limite, são representadas graficamente na figura 8.

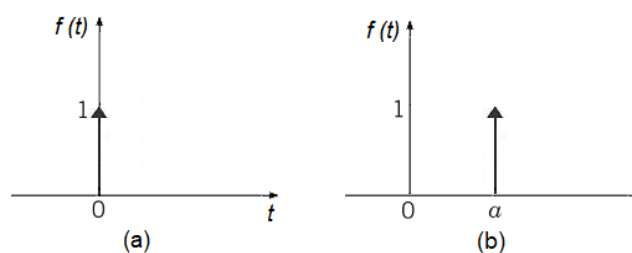


Figura 8 - a) Função impulso unitário; b) Função impulso unitário com atraso  $t=a$ . Fonte: Autores.

A função impulso unitário é utilizada para representar cargas concentradas e as suas transformadas de Laplace são as seguintes:

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \quad (41)$$

$$\mathcal{L}[\delta(t - a)] = e^{-as} \quad (42)$$

#### 4 – A função unidade dupla

Chamada também de dobrete unitário, representada graficamente na figura 6 a), é definida como derivada da função delta de Dirac, isto é:

$$\delta'(t) = \frac{d}{dt} \delta(t) \quad (43)$$

As funções unidade dupla com atraso e sem atraso, aproximadas no limite, são representadas graficamente na figura 9.

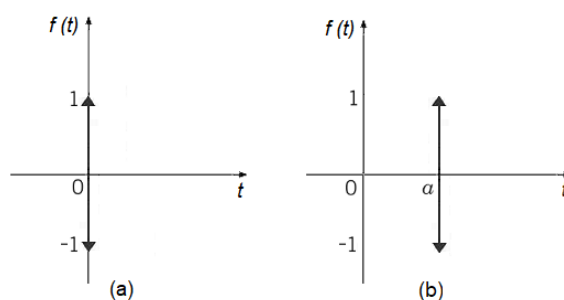


Figura 9 - a) Função unidade dupla; b) Função unidade dupla com atraso  $t=a$ . Fonte: Autores.

A função unidade dupla é utilizada para representar cargas momento e as suas transformadas de Laplace são:

$$\mathcal{L}[\delta'(t)] = s \quad (44)$$

$$\mathcal{L}[\delta'(t - a)] = s e^{-as} \quad (45)$$

#### Resultados e discussão

Neste item, os exemplos 1, 2, 3 e 4, apresentados anteriormente, são resolvidos utilizando-se as transformadas de Laplace, a partir da equação (6), com o sinal da carga

positiva, ou seja, adotando a coordenada  $y$  no sentido para baixo, isto é:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{w(x)}{EI} \quad (46)$$

As condições de contorno das vigas são determinadas de acordo com tipo de vinculação das suas extremidades, como se mostra na Tabela 3.

Tabela 3 – Condições de contorno de uma viga.

Extremidade da viga	Condições de contorno	
Engastada	$y = 0$ (Flecha)	$y' = 0$ (Declividade)
Livre	$y'' = 0$ (Momento)	$y''' = 0$ (Cortante)
Simplesmente apoiada	$y = 0$ (Flecha)	$y'' = 0$ (Momento)

Fonte: Autores.

**Exemplo 1:** Viga engastada com carga distribuída parcial.

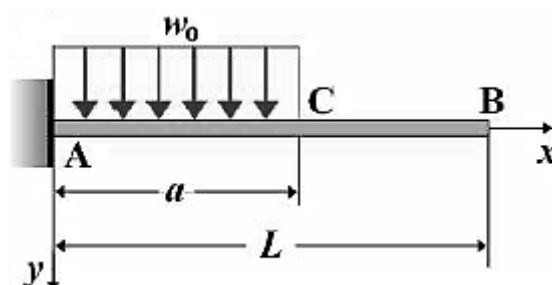


Figura 10 – Viga engastada com carga distribuída parcial. Fonte: Autores.

As condições de contorno da viga da figura 10 são:

$$\text{Para } x = 0 \rightarrow y(0) = 0; \quad y'(0) = 0 \quad (47)$$

$$\text{Para } x = L \rightarrow y''(L) = 0; \quad y'''(L) = 0 \quad (48)$$

A carga  $w(x)$  obedece duas condições:

$$w(x) = \begin{cases} w_0 & (0 < x < a) \\ 0 & (x > a) \end{cases} \quad (49)$$

A carga  $w(x)$  dada pela função (49), pode ser representada pela função degrau unitário da seguinte forma:

$$w(x) = w_0[u(x) - u(x - a)] \quad (49)$$

Dessa forma, substituindo-se a equação (49) na equação (46), tem-se:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{w_0[u(x) - u(x - a)]}{EI} \quad (50)$$

Aplicando a Transformada de Laplace em ambos os membros da equação (51), resulta:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^4 y}{dx^4}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{w_0[u(x) - u(x - a)]}{EI}\right\} \quad (51)$$

$$s^4 Y(s) - s^3 y(0) - s^2 y'(0) - s y''(0) - y'''(0) = \frac{w_0}{EI} \left[ \frac{1}{s} - \frac{e^{-as}}{s} \right] \quad (52)$$

Aplicando as condições de contorno desta viga dadas em (47), na equação (52), tem-se:

$$s^4 Y(s) - s y''(0) - y'''(0) = \frac{w_0}{EI} \left[ \frac{1}{s} - \frac{e^{-as}}{s} \right] \quad (53)$$

Fazendo:  $y''(0) = c_1$  e  $y'''(0) = c_1$  na equação (53), tem-se:

$$Y(s) = \frac{c_1}{s^3} + \frac{c_2}{s^4} + \frac{w_0}{EI} \left[ \frac{1}{s^5} - \frac{e^{-as}}{s^5} \right] \quad (54)$$

Aplicando a Transformada Inversa na equação (54):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{c_1}{s^3} + \frac{c_2}{s^4} + \frac{w_0}{EI} \left[ \frac{1}{s^5} - \frac{e^{-as}}{s^5} \right]\right\} \\ y(x) &= c_1 \frac{x^2}{2!} + c_2 \frac{x^3}{3!} + \frac{w_0}{EI} \frac{x^4}{4!} - \frac{w_0}{EI} \frac{(x-a)^4}{4!} u(x-a) \\ y(x) &= c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 \frac{x^3}{6} + \frac{w_0}{EI} \frac{x^4}{24} - \frac{w_0}{EI} \frac{(x-a)^4}{24} u(x-a) \end{aligned} \quad (55)$$

Para aplicar as condições de contorno do ponto B da viga (figura 10), dadas em (48), no qual  $x > a$ , a função degrau unitário vale 1, isto é:  $u(x - a) = 1$ , logo a equação (55), fica:

$$y(x) = c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 \frac{x^3}{6} + \frac{w_0}{EI} \frac{x^4}{24} - \frac{w_0}{EI} \frac{(x-a)^4}{24} \quad (56)$$

Calculando-se as derivadas de primeira, segunda e terceira ordem da equação (56), obtêm-se:

$$y'(x) = c_1x + c_2 \frac{x^2}{2} + \frac{w_0 x^3}{EI} - \frac{w_0 (x-a)^3}{EI} \quad (57)$$

$$y''(x) = c_1 + c_2x + \frac{w_0 x^2}{EI} - \frac{w_0 (x-a)^2}{EI} \quad (58)$$

$$y'''(x) = 0 + c_2 + \frac{w_0}{EI}x - \frac{w_0}{EI}(x-a) \quad (59)$$

Aplicando-se as condições de contorno da viga, dadas em (48), obtêm-se:

$$y'''(L) = 0 \Rightarrow c_2 + \frac{w_0}{EI}L - \frac{w_0}{EI}(L-a) = 0 \quad (60)$$

$$y''(L) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2L + \frac{w_0 L^2}{EI} - \frac{w_0 (L-a)^2}{EI} = 0 \quad (61)$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações (62) e (63), encontra-se as constantes:

$$c_1 = \frac{w_0}{2EI}a^2 \quad (62)$$

$$c_2 = -\frac{w_0}{EI}a \quad (63)$$

Finalmente, substituindo as constantes (62) e (63) na equação geral (55) é determinada a equação da linha elástica requerida para esta viga.

$$y(x) = \frac{w_0 a^2}{4EI}x^2 - \frac{w_0 a}{6EI}x^3 + \frac{w_0}{24EI}x^4 - \frac{w_0}{24EI}(x-a)^4u(x-a)$$

$$y(x) = \frac{w_0}{24EI}[6a^2x^2 - 4ax^3 + x^4 - (x-a)^4u(x-a)] \quad (64)$$

Levando-se em conta as propriedades da função degrau unitário, dadas em (31), pode-se observar que a equação (64) é igual às equações (7) e (8), exceto pelo sinal, devido à mudança do sentido da coordenada y.

**Exemplo 2:** Viga biapoiada com carga concentrada.



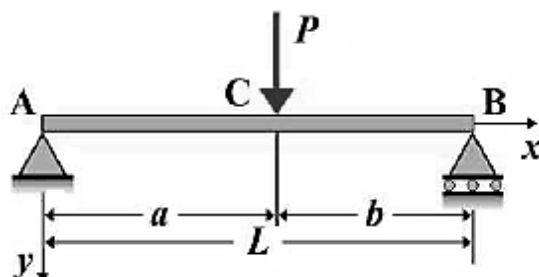


Figura 11 – Viga biapoiada com carga concentrada. Fonte: Autores.

As condições de contorno da viga da figura 11 são:

$$\text{Para } x = 0 \rightarrow y(0) = 0; \quad y''(0) = 0 \quad (65)$$

$$\text{Para } x = L \rightarrow y(L) = 0; \quad y''(L) = 0 \quad (66)$$

Neste caso, a carga  $w(x)$  é representada com o auxílio da função impulso unitário ou função delta de Dirac, da seguinte forma:

$$w(x) = P\delta(x - a) \quad (67)$$

Substituindo-se a equação (67) na equação (46), tem-se:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{P}{EI} \delta(x - a) \quad (68)$$

Aplicando a Transformada de Laplace em ambos os membros da equação (68), obtém-se:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^4 y}{dx^4}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{P}{EI} \delta(x - a)\right\}$$

$$s^4 Y(s) - s^3 y(0) - s^2 y'(0) - s y''(0) - y'''(0) = \frac{P}{EI} e^{-as} \quad (69)$$

Aplicando-se as condições de contorno, dadas em (65), na equação (69), tem-se:

$$s^4 Y(s) - s^2 y'(0) - y'''(0) = \frac{P}{EI} e^{-as} \quad (70)$$

Fazendo:  $y'(0) = c_1$  e  $y'''(0) = c_2$ , a equação (70), fica:

$$Y(s) = \frac{c_1}{s^2} + \frac{c_2}{s^4} + \frac{P}{EI} \frac{e^{-as}}{s^4} \quad (71)$$

Aplicando a Transformada Inversa de Laplace em ambos os membros da equação (71), obtêm-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{c_1}{s^2} + \frac{c_2}{s^4} + \frac{P}{EI} \frac{e^{-as}}{s^4}\right\} \\ y(x) &= c_1 \frac{x}{1!} + c_2 \frac{x^3}{3!} + \frac{P}{EI} \frac{(x-a)^3}{3!} u(x-a) \\ y(x) &= c_1 x + c_2 \frac{x^3}{6} + \frac{P}{EI} \frac{(x-a)^3}{6} u(x-a) \end{aligned} \quad (72)$$

Sabendo que para  $x > a \Rightarrow u(x-a) = 1$ , logo a equação (72) fica:

$$y(x) = c_1 x + c_2 \frac{x^3}{6} + \frac{P}{EI} \frac{(x-a)^3}{6} \quad (73)$$

A determinação dos valores das constantes  $c_1$  e  $c_2$  é realizada por meio da primeira e segunda derivada da equação (73), associada à aplicação das condições de contorno da viga dadas em (66).

$$y'(x) = c_1 + c_2 \frac{x^2}{2} + \frac{P}{EI} \frac{(x-a)^2}{2} \quad (74)$$

$$y''(x) = 0 + c_2 x + \frac{P}{EI} (x-a) \quad (75)$$

De acordo com as condições de contorno, dadas em (66), tem-se:

$$y''(L) = 0 \Rightarrow c_2 L + \frac{P}{EI} (L-a) = 0 \quad (76)$$

$$y(L) = 0 \Rightarrow c_1 L + c_2 \frac{L^3}{6} + \frac{P}{EI} \frac{(L-a)^3}{6} = 0 \quad (77)$$

Resolvendo-se o sistema de equações formado pelas equações (76) e (77), obtêm-se:

$$c_1 = \frac{Pb}{6EIL} (L^2 - b^2) \quad (78)$$

$$c_2 = -\frac{P}{EIL} (L - a) \quad (79)$$

Substituindo-se os valores das constantes  $c_1$  e  $c_2$ , dados respectivamente em (78) e (79), na equação geral (72), obtêm-se a equação da linha elástica para esta viga:

$$y(x) = \frac{Pb}{6EIL} (L^2 - b^2)x - \frac{P}{6EIL} (L - a)x^3 + \frac{P}{6EI} (x - a)^3 u(x - a)$$

$$y(x) = \frac{P}{6EIL} [b(L^2 - b^2)x - bx^3 + L(x - a)^3 u(x - a)] \quad (80)$$

Pode se observar que o resultado encontrado na equação (80), considerando-se as propriedades da função degrau unitário, é o mesmo aos encontrados nas equações (9) e (10), exceto pelo sinal.

**Exemplo 3:** Viga em balanço com carga linearmente distribuída.

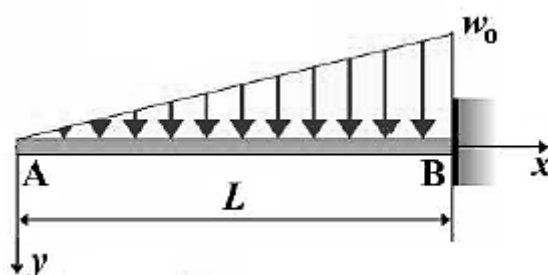


Figura 12 – Viga em balanço com carga linearmente distribuída. Fonte: Autores.

As condições de contorno da viga da figura 12 são:

$$\text{Para } x = 0 \rightarrow y''(0) = 0; \quad y'''(0) = 0 \quad (81)$$

$$\text{Para } x = L \rightarrow y(L) = 0; \quad y'(L) = 0 \quad (82)$$

A carga  $w(x)$  obedece duas condições:

$$w(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{w_0}{L}x & x > 0 \end{cases} \quad (83)$$

A carga  $w(x)$  dada pela função (83), pode ser representada pela função rampa unitária, da seguinte forma:

$$w(x) = \frac{w_0}{L} r(x) \quad (84)$$

Substituindo-se a equação (84) na equação (46), tem-se:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{w_0}{EIL} r(x) \quad (85)$$

Aplicando a transformada de Laplace em ambos os membros da equação (85), tem-se:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^4 y}{dx^4}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{w_0}{EIL} r(x)\right\}$$

$$s^4 Y(s) - s^3 y(0) - s^2 y'(0) - s y''(0) - y'''(0) = \frac{w_0}{EIL} \frac{1}{s^2} \quad (86)$$

Conhecidas as condições de contorno para o ponto A da viga da figura 12, dadas em (81) e aplicando-as na equação (86), obtêm-se:

$$s^4 Y(s) - s^3 y(0) - s^2 y'(0) = \frac{w_0}{EIL} \frac{1}{s^2} \quad (87)$$

Para a resolução da equação (87), é necessário determinar os valores das outras incógnitas. Chamando:  $y(0)=c_1$  e  $y'(0)=c_2$ .

$$Y(s) = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s^2} + \frac{w_0}{EIL} \frac{1}{s^6} \quad (88)$$

Aplicando a Transformada Inversa na equação (88), tem-se:

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s^2} + \frac{w_0}{EIL} \frac{1}{s^6}\right\}$$

$$y(x) = c_1 + c_2 \frac{x}{1!} + \frac{w_0}{EIL} \frac{x^5}{5!}$$

$$y(x) = c_1 + c_2 x + \frac{w_0}{EIL} \frac{x^5}{120} \quad (89)$$

Para se determinar as constantes  $c_1$  e  $c_2$ , é necessário determinar a derivada primeira da equação (89).

$$y'(x) = 0 + c_2 + \frac{w_0}{EIL} \frac{x^4}{24} \quad (90)$$

Aplicando-se as condições de contorno dadas em (82), nas equações (90) e (89):

$$y'(L) = 0 \Rightarrow c_2 + \frac{w_0}{EIL} \frac{L^4}{24} = 0 \quad (91)$$

$$y(L) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 L + \frac{w_0}{EIL} \frac{L^5}{120} = 0 \quad (92)$$

Resolvendo as equações (91) e (92), obtêm-se:

$$c_1 = \frac{w_0}{EIL} \frac{L^5}{30} \quad (93)$$

$$c_2 = -\frac{w_0}{EIL} \frac{L^4}{24} \quad (94)$$

Substituindo os valores das constantes dados em (93) e (94) na equação (89), determina-se a equação da çunha elástica para a viga em estudo.

$$y(x) = \frac{w_0}{EIL} \frac{L^5}{30} - \frac{w_0}{EIL} \frac{L^4}{24} x + \frac{w_0}{EIL} \frac{x^5}{120}$$

$$y(x) = \frac{w_0}{120EIL} [4L^5 - 5L^4 x + x^5] \quad (95)$$

O resultado encontrado na equação (95), é a mesma à encontrada na equação (9), exceto pelo sinal.

**Exemplo 4:** Viga biapoiada com carga momento.

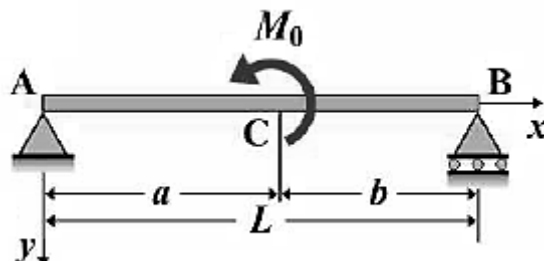


Figura 13 – Viga biapoiada com carga momento. Fonte: Autores.

As condições de contorno da viga da figura 13 são:

$$\text{Para } x = 0 \rightarrow y(0) = 0; \quad y''(0) = 0 \quad (96)$$

$$\text{Para } x = L \rightarrow y(L) = 0; \quad y''(L) = 0 \quad (97)$$

Neste caso, a carga  $w(x)$  é representada pela função unidade dupla, isto é:

$$w(x) = M_0 \delta'(x - a) \quad (98)$$

Substituindo-se a equação (98) na equação (46), tem-se:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{M_0}{EI} \delta'(x - a) \quad (99)$$

Aplicando a transformada de Laplace em ambos os membros da equação (99), obtêm-se:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^4 y}{dx^4} \right\} = \mathcal{L} \left\{ \frac{M_0}{EI} \delta'(x - a) \right\}$$

$$s^4 Y(s) - s^3 y(0) - s^2 y'(0) - s y''(0) - y'''(0) = \frac{M_0}{EI} s e^{-as} \quad (100)$$

Aplicando-se as condições de contorno dadas em (96) na equação (100), tem-se:

$$s^4 Y(s) - s^2 y'(0) - y'''(0) = \frac{M_0}{EI} s e^{-as} \quad (101)$$

Fazendo:  $y'(0) = c_1$  e  $y'''(0) = c_2$ , a equação (101), fica:

$$Y(s) = \frac{c_1}{s^2} + \frac{c_2}{s^4} + \frac{M_0}{EI} \frac{e^{-as}}{s^3} \quad (102)$$

Aplicando-se a Transformada Inversa de Laplace em ambos os membros da equação (102), obtêm-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{c_1}{s^2} + \frac{c_2}{s^4} + \frac{M_0}{EI} \frac{e^{-as}}{s^3}\right\} \\ y(x) &= c_1 \frac{x}{1!} + c_2 \frac{x^3}{3!} + \frac{M_0}{EI} \frac{(x-a)^2}{2!} u(x-a) \\ y(x) &= c_1 x + c_2 \frac{x^3}{6} + \frac{M_0}{EI} \frac{(x-a)^2}{2} u(x-a) \end{aligned} \quad (103)$$

Para  $x > a \Rightarrow u(x-a) = 1$ , logo a equação (103) fica:

$$y(x) = c_1 x + c_2 \frac{x^3}{6} + \frac{M_0}{EI} \frac{(x-a)^2}{2} \quad (104)$$

A determinação dos valores das constantes  $c_1$  e  $c_2$  é realizada por meio da primeira e segunda derivada da equação (104).

$$y'(x) = c_1 + c_2 \frac{x^2}{2} + \frac{M_0}{EI} (x-a) \quad (105)$$

$$y''(x) = 0 + c_2 x + \frac{M_0}{EI} \quad (106)$$

Aplicando-se as condições de contorno da viga dadas em (97), tem-se:

$$y''(L) = 0 \Rightarrow c_2 L + \frac{M_0}{EI} = 0 \quad (107)$$

$$y(L) = 0 \Rightarrow c_1 L + c_2 \frac{L^3}{6} + \frac{M_0}{EI} \frac{(L-a)^2}{2} = 0 \quad (108)$$

Resolvendo-se o sistema de equações formado pelas equações (107) e (108), obtêm-se as constantes  $c_1$  e  $c_2$ :

$$c_1 = \frac{M_0}{6EIL} [L^2 - 3(L - a)^2] \quad (109)$$

$$c_2 = -\frac{M_0}{EIL} \quad (110)$$

Substituindo-se os valores das constantes  $c_1$  e  $c_2$  obtidos em (109) e (110) na equação (103), obtêm-se a equação da linha elástica para viga:

$$y(x) = \frac{M_0}{6EIL} [L^2 - 3(L - a)^2]x - \frac{M_0}{6EIL} x^3 + \frac{M_0}{2EI} (x - a)^2 u(x - a)$$

$$y(x) = \frac{M_0}{6EIL} \{ [L^2 - 3(L - a)^2]x - x^3 + 3L(x - a)^2 u(x - a) \} \quad (111)$$

Pode-se observar que os resultados encontrados na equação (111) não são exatamente iguais, literalmente, aos encontrado nas equações (12) e (13), mas, se forem realizadas as operações algébricas convenientes, resultaram em expressões algébricas idênticas, exceto o sinal. Essas “diferenças”, costumam acontecer as vezes, apenas devido às características particulares de cada método.

## Conclusões

As transformadas de Laplace utilizadas na resolução de uma Equação Diferencial Ordinária, consiste em realizar uma mudança de variável, por meio de uma integral imprópria, transformando-a em uma equação algébrica, que uma vez resolvida, é feita a reversão do processo, aplicando-se a transformada inversa de Laplace e posteriormente as condições de contorno, chegando-se assim, à solução do problema.

A utilização de funções especiais, como a função degrau unitária, a função rampa unitária, a função impulso unitário e a função unidade dupla, assim como as suas respectivas transformadas de Laplace, permitem representar, os tipos de carregamentos (carga uniformemente distribuída, carga linearmente distribuída, carga concentrada e carga momento), normalmente utilizados no cálculo de deslocamentos e esforços em vigas.



As Transformadas de Laplace podem ser aplicadas também no cálculo de deslocamentos em vigas hiperestáticas, já que o grau de hiperestaticidade das vigas não interferem na sua resolução, ocorrerá apenas um acréscimo das condições de contorno igual ao número de constantes.

Foi demonstrado que a utilização das transformadas de Laplace, são uma ferramenta valiosa e a tornam uma alternativa acessível para a resolução da linha elástica de uma viga, já que os resultados são os mesmos que os obtidos por outros métodos, além de facilitar e simplificar, de forma considerável, os cálculos matemáticos envolvidos e a aplicação das condições de contorno, que ficam restritas apenas aos tipos de vinculação da viga.

## **Referências**

- ANTON, H., BIVENS, I., DAVIS, S. **Calculus**. 10 ed. New York. John Wiley e Sons, 2012.
- AYRES Jr., F. e MENDELSON, E. **Cálculo**. 5 ed. Bookman, 2012.
- BEER, F. P.; JONHSTON, E. R.; WOL, J. T.; D. F. MAZUREK. **Mecânica dos Materiais**. 8 ed. Porto Alegre. AMGH, 2021.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. 3 ed. São Paulo. Blucher; 2012.
- BRONSON, R. e, COSTA, G. B. **Equações Diferenciais**. 3 ed. Porto Alegre. Bookman, 2008.
- HIBBELER, R. C. **Resistência dos Materiais**. 10 ed. São Paulo. Pearson Prentice Hall, 2019.
- HSU, T. H. **Applied Engineering Analysis**. John Wiley & Sons, 2018.
- LUTOSA, J. I. S. **A transformada de Laplace e algumas aplicações**. 2017. 89 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Faculdade de Matemática, Universidade Federal da Paraíba, Paraíba, 2017.
- NASH, W. N. **Resistência dos Materiais**. 3 ed. São Paulo. McGraw-Hill Ltda, 1982.
- NASH, W. N. **Resistência dos Materiais**. 4 ed. São Paulo. McGraw-Hill Ltda, 2001.
- SAUTER, E; AZEVEDO, F. S; STRAUCH. I.M. **Transformada de Laplace: um livro colaborativo**. Rio Grande do Sul: UFRGS/ Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2022.

SCHIFF, J. L., ALEXER, S., GEHRING, F.W., RIBET.K.A. **The Laplace Transform: Theory and Applications**. New York. Springer-Verlag, 1999.

SPIEGEL, M. R. **Transformadas de Laplace**. São Paulo. Mc Graw-Hill, 1971.

ZILL, D.G. **Equações Diferenciais com aplicação e modelagem**. 3 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.