

FÓRMULA DE HERON E APLICAÇÕES NA GEOMETRIA PLANA

HERON'S FORMULA AND APPLICATIONS IN PLANE GEOMETRY

LEONARDO ANTÔNIO SOUTO

UEG – Universidade Estadual de Goiás

leonardosouto12@yahoo.com.br

FERNANDO GONÇALVES DA COSTA

UEG – Universidade Estadual de Goiás

fernandobq_gc@yahoo.com.br

Resumo: Este artigo relaciona vários conceitos históricos e matemáticos. Foi feita uma pesquisa bibliográfica, exploratória e descritiva, cujo objetivo é conhecer e analisar conceitos matemáticos envolvidos no cálculo do Teorema de Heron, bem como sua aplicação na Geometria Plana. Primeiro a história de Heron de Alexandria e a sua demonstração na integral de seu famoso teorema para o cálculo da área de triângulos quaisquer quando se conhece seus três lados. A demonstração foi baseada na prova original e histórica desenvolvida por Heron, dado que mais tarde outros métodos foram desenvolvidos para demonstrar o mesmo teorema. Por fim o artigo traz como se pode aplicar o teorema de Heron em diferentes contextos da Geometria Plana.

Palavras-chave: Euclides; Fórmula de Heron; Geometria; História da Matemática.

Abstract: This article relates several historical and mathematical concepts. A bibliographical, exploratory and descriptive research was carried out, the objective of which is to understand and analyze mathematical concepts involved in the calculation of Heron's Theorem, as well as its application in Plane Geometry. First the story of Heron of Alexandria and his demonstration in full of his famous theorem for calculating the area of any triangles when their three sides are known. The demonstration was based on the original and historical proof developed by Heron, given that later other methods were developed to demonstrate the same theorem. Finally, the article shows how Heron's theorem can be applied in different contexts of Plane Geometry.

Keywords: Euclid; Heron formula; Geometry; History of Mathematics.

Introdução

Desde cedo o homem, movido pela necessidade e a falta de recursos, mostra interesse pela Geometria e as facilidades que ela trouxe para o cotidiano. No vale do Rio Nilo, os egípcios visando simplificar atividades como a Agrimensura, a Arquitetura e os serviços que envolviam irrigação, desenvolveram sua própria matemática. No século V a.C., o grego *Heródoto*, conhecido na época como o Pai da História, disse o seguinte sobre as atividades beneficiadas pela matemática dedutiva criada pelos egípcios:

Esse faraó (*Sesóstris*) realizou a partilha das terras, concedendo a cada egípcio uma porção igual, com a condição de ser-lhe pago todos os anos certo tributo; se o rio carregava alguma parte do lote de alguém, o prejudicado ia procurar o rei e expor-lhe o ocorrido. O soberano enviava agrimensores para o local, para determinar a redução sofrida pelo terreno, passando o proprietário a pagar um tributo proporcional ao que restara. Eis, ao que me parece, a origem da Geometria, que teria passado do Egito para a Grécia. (GARBI, 2010, p. 12).

No Egito antigo, com as cheias do Rio Nilo, era muito comum que as cercas que demarcavam terrenos fossem destruídas e as demarcações dos terrenos e das plantações fossem apagadas. Quando se passavam as cheias do rio, os egípcios marcavam novamente as terras, utilizando registros que haviam sido feitos antes do nível das águas se elevarem (CARAÇA, 1951).

Os egípcios, grandes precursores da Geometria, não fizeram questão de levá-la além do que extremamente o necessário para seus desejos e atividades práticas. Ao contrário dos gregos, fortes especuladores, possuíam uma ganância absurda de descobrir as razões das coisas. Dessa forma, os gregos ávidos de conhecimento, recorriam aos sacerdotes egípcios para se orientarem. Segundo historiadores:

A matemática não começou com os gregos, ela já era fortemente explorada pelos egípcios, porém uma coisa é certa, teve início com os gregos as demonstrações e deduções, e foram pensadores como Tales, Pitágoras, Euclides, entre outros que fizeram a matemática como a conhecemos hoje em dia. (CONTADOR, 2004).

Nesse artigo pretendemos retornar à história e mostrar que apesar de todas as dificuldades encontradas na época, Heron de Alexandria, conseguiu com seus estudos deixar um legado honroso em trabalhos de uma grandeza ímpar no ramo da matemática e também da engenharia.

O foco do artigo está na Fórmula de Heron e sua contribuição significativa para a Geometria Plana. O objetivo principal é explorar e analisar a fórmula desenvolvida por Heron para o cálculo da área de triângulos quaisquer, dada a medida de seus três lados. Para alcançar esse objetivo, faremos uma revisão histórica e matemática detalhada do teorema de Heron, incluindo uma explicação completa de sua demonstração original.

Além disso, o artigo investiga duas aplicações práticas da Fórmula de Heron na Geometria Plana, no qual realizaremos uma aplicação da Fórmula de Heron no teorema de Pitágoras e outra na construção do triângulo de maior área, mostrando como essa fórmula pode ser utilizada para resolver problemas relacionados à área de triângulos em diversos contextos geométricos.

História de Heron de Alexandria

Segundo Garbi (2010), pouco se sabe sobre a vida de Heron de Alexandria, um gênio, especialista em matemática que possuía pleno domínio da Física, além de conhecimento aprofundado em Astronomia e Engenharia. Estima-se que Heron tenha vivido na segunda metade do século I d.C. e que provavelmente, fosse de origem egípcia. Dentre seus vários trabalhos, o mais conhecido é a fórmula de Heron, através da qual é possível calcular a área de um triângulo quando se conhece as medidas dos três lados.

Heron teve seu nome imortalizado pela profundidade da visão necessária para encontrar todas as relações presentes na demonstração de sua fórmula e pela intuição que o levou a pesquisar os elementos necessários exatamente naquela figura construída por ele.

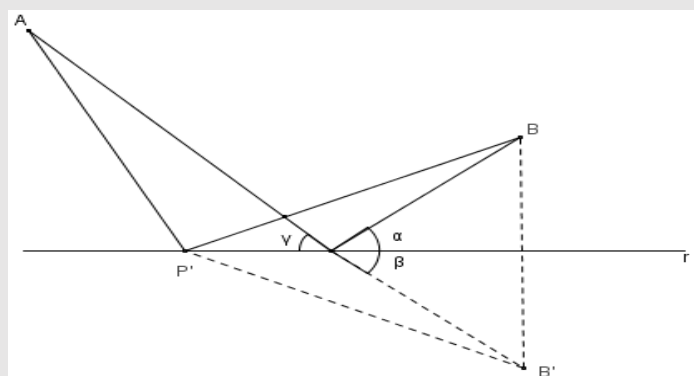
Aproximadamente 9 séculos após a morte de Heron, um comentarista árabe, chamado Abu'l Raihan Muhammad al-Biruni, produziu um manuscrito no qual afirmava que o verdadeiro descobridor desta fórmula é, na verdade o grande Arquimedes, nada que comprovasse a afirmação de al-Biruni foi caracterizada, e apesar de reconhecida a genialidade de Arquimedes e de não restar dúvidas de sua capacidade intelectual para chegar a esta fórmula, o comentário de al-Biruni foi ignorado e acredita-se que Heron tenha sido o real descobridor da fórmula (Garbi, 2010).

Heron teve ainda suas contribuições para a Engenharia, dentre suas criações destacam-se um dispositivo que teria sido o precursor da máquina a vapor, uma bomba d'água para apagar incêndios e uma máquina automática de vender água sagrada em templos, que surpreende por ser baseada no mesmo princípio das primeiras vendedoras modernas.

A visão moderna de Heron pode ser observada na impressionante conclusão que ele tirou a respeito de certos comportamentos da natureza, com base na solução de um problema geométrico.

Sejam conforme a figura 2.2, sobre um mesmo plano, uma reta r e dois pontos A e B situados no mesmo semi plano em relação a r . Heron perguntou-se qual a localização de um ponto P da reta que faz com que a soma dos segmentos $AP + PB$ seja mínima. É fácil mostrar que o ponto P procurado é o cruzamento da reta dada com a reta que une um ponto ao simétrico do outro em relação a r . De fato, para qualquer ponto P' distinto de P , a soma $AP' + P'B = AP' + P'B' > AB' = \beta = \gamma$, então $\alpha = \gamma$. Mas os gregos já sabiam que, nos espelhos, os raios de luz comportam-se exatamente dessa maneira, refletindo-se de modo que o ângulo de incidência seja igual ao de reflexão. Heron concluiu disso que a Natureza em algumas circunstâncias, comporta-se de modo a minimizar ou maximizar certas grandezas (neste caso, minimizar o trajeto e o tempo de percurso da luz). Sua conclusão intuitiva estava correta e foi confirmada pela física moderna, após o encontro de muitos outros exemplos naturais de maximização ou minimizações. (GARBI, 2010, p. 119).

Figura 1: Problema de Heron do raio de luz



Fonte: Garbi, 2010, p. 120

Heron demonstrou uma engenhosidade prática impressionante através de suas invenções na engenharia, antecipando conceitos modernos como a máquina a vapor e a automação rudimentar. Esses feitos sublinham sua capacidade de aplicar princípios matemáticos a desafios tecnológicos de sua época. Portanto, Heron de Alexandria emerge como uma figura central na história da matemática e da engenharia, cuja obra continua a influenciar e inspirar gerações de cientistas e engenheiros. Suas contribuições não apenas avançaram o conhecimento matemático, mas também exemplificaram a integração entre teoria e prática, característica fundamental da ciência e da engenharia modernas.

O teorema de Heron

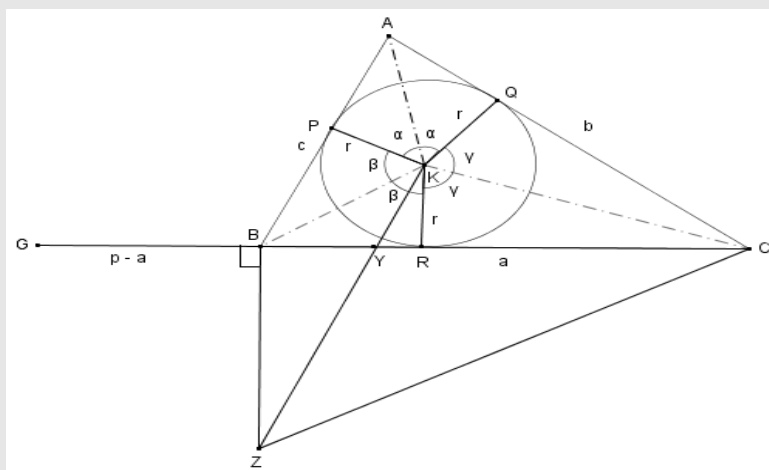
Se tratando de um clássico, o teorema de Heron para calcular a área de um triângulo quando se conhece seus três lados, começou a se desencadear quando ele construiu um círculo inscrito no triângulo ABC como na Figura 2.

A demonstração deste resultado será baseada em Garbi (2010). Queremos provar que se ABC , é um triângulo cujos lados medem a , b e c , então a área deste triângulo é dada por:

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a).(p-b).(p-c)}$$

Onde $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Figura 2: Dedução da Fórmula de Heron



Fonte: Garbi, 2010, p. 115

Vamos observar o triângulo ABC , que está circunscrito à circunferência λ de centro K e raio r . Iremos agora calcular sua área, somando as áreas dos triângulos AKC , AKB e BKC , cujas alturas relativas às suas bases são todas iguais a r .

$$\text{Área do triângulo AKC: } S = \frac{1}{2} \cdot r \cdot AC \quad (1)$$

$$\text{Área do triângulo AKB: } S = \frac{1}{2} \cdot r \cdot AB \quad (2)$$

$$\text{Área do triângulo BKC: } S = \frac{1}{2} \cdot r \cdot BC \quad (3)$$

Somando as áreas dos triângulos AKC, AKB e BKC, temos:

$$S = \frac{1}{2} \cdot r \cdot AC + \frac{1}{2} \cdot r \cdot AB + \frac{1}{2} \cdot r \cdot BC \quad (4)$$

Colocando o raio de λ em evidência, teremos:

$$S = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (AB + BC + AC) \quad (6)$$

Como: $AB = a$, $BC = b$, $AC = c$ e substituindo na equação (6), teremos:

$$S = \frac{r}{2} (a + b + c) \quad (7)$$

Vamos agora chamar $(a + b + c)$, o perímetro do triângulo ABC, de $2p$:

Substituindo na equação (7), teremos:

$$S = \frac{r}{2} (2p)$$

Fazendo a simplificação e chamando p de semi-perímetro do triângulo ABC, ou seja, a soma dos lados do triângulo dividida por dois, temos a forma reduzida:

$$S = r \cdot p \quad (8)$$

Prosseguindo, vamos agora mostrar que o segmento AP é igual ao segmento AQ.

Observando os triângulos APK e AQK, temos que os ângulos $\hat{APK}$ e $\hat{AQK}$ são ambos retângulos, já que os pontos P e Q são tangentes à circunferência. O lado AK é comum aos dois triângulos e os segmentos $\overline{PK}$ e $\overline{QK}$, são iguais, pois são raios de uma mesma circunferência.

Por semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{\overline{PK}}{\overline{QK}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{AK}} \quad (9)$$

Como $\overline{PK}$ e $\overline{QK}$ são ambos raios de λ , sua razão será igual a 1.

Logo:

$$1 = \frac{AP}{AQ} \quad (10)$$

Daí, podemos concluir que $AP = AQ$.

Analogamente, podemos dizer que $CQ = CR$ e $BP = BR$

Como:

$$AP + BP = AB \quad (11)$$

$$AQ + CQ = AC \quad (12)$$

$$BR + CR = BC \quad (13)$$

Somando-se as equações (11), (12) e (13), tem-se:

$$AP + BP + AQ + CQ + BR + CR = (AB + BC + AC)$$

$$(AP + AQ) + (BP + BR) + (CQ + CR) = (AB + BC + AC) \quad (14)$$

Substituindo AQ por AP , BR por BP , CR por CQ e a soma $(AB + BC + AC)$ por $2p$, temos:

$$(AP + AP) + (BP + BP) + (CQ + CQ) = 2p$$

$$2AP + 2BP + 2CQ = 2p$$

$$2(AP + BP + CQ) = 2p \quad (15)$$

Simplificando ambos os lados da equação (15), obtemos:

$$AP + BP + CQ = p \quad (16)$$

Como:

$$AP + BP = AB = c \quad (17)$$

Isolando CQ , na equação (16):

$$CQ = p - (AP + BP) \quad (18)$$

Substituindo $(AP + BP)$ por c , em (18) temos:

$$CQ = p - c \quad (19)$$

Vamos agora isolar BP na equação (16):

$$BP = p - (AP + CQ) \quad (20)$$

Como já sabemos $\overline{AP} = \overline{AQ}$, então vamos substituir em (20):

$$BP = p - (AQ + CQ) \quad (21)$$

Como:

$$AQ + CQ = AC = b \quad (22)$$

Substituindo (22) em (21), temos:

$$BP = p - b \quad (23)$$

Por último isolamos $\overline{AP}$, na equação (16):

$$AP = p - (BP + CQ) \quad (24)$$

Como já visto anteriormente, $\overline{CQ} = \overline{CR}$ e $\overline{BP} = \overline{BR}$, substituindo em (24), teremos:

$$AP = p - (BR + CR) \quad (25)$$

Como:

$$BR + CR = BC = a \quad (26)$$

Substituindo $(BR + CR)$ por a , na equação (25) temos:

$$AP = p - a \quad (27)$$

Resumindo:

$$AP = AQ = (p - a) \quad (28)$$

$$BP = BR = (p - b) \quad (29)$$

$$CQ = CR = (p - c) \quad (30)$$

Logo após, Heron, por construção alongou o lado $\overline{BC}$, criando assim o segmento $\overline{BG}$, com medida igual a do segmento $\overline{AP}$:

$$BG = AP = (p - a) \quad (31)$$

Podemos, dessa forma, encontrar o comprimento do seguimento $\overline{CG}$ em função do semi-perímetro do triângulo ABC :

$$CG = BG + BR + CR \quad (32)$$

$\overline{AP}$, teremos:

$$CG = (p - a) + (p - b) + (p - c)$$

$$CG = 3p - (a + b + c)$$

Como:

$$(a + b + c) = 2p$$

Concluimos que o segmento $\overline{CG}$ é igual ao semi-perímetro do triângulo ABC :

$$CG = 3p - 2p$$

$$CG = p \quad (33)$$

Em seguida Heron construiu duas perpendiculares, uma pelo ponto K à reta $\overline{KC}$ e outra pelo ponto B à reta $\overline{BC}$. Elas se encontram no ponto Z . Ele também chamou o cruzamento da reta $\overline{BC}$ com $\overline{KZ}$ de Y e, pela construção feita a partir da Figura 2.1, observou-se que:

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360^\circ$$

Simplificou ambos os lados, e:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Logo após isolou α na equação:

$$\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma) \quad (34)$$

Observemos agora na Figura 2.1 o quadrilátero $BKCZ$. Analisando os ângulos retos $Z\hat{B}C$ e $Z\hat{K}C$, percebemos que o segmento $\overline{ZC}$ é visto tanto pelo ponto B quanto pelo ponto K sob um ângulo reto. Tais pontos são conhecidos como um lugar geométrico, onde $\overline{ZC}$ é o diâmetro de uma circunferência que passa pelos pontos B e K . Logo concluimos que o quadrilátero $BKCZ$ é inscrito e seus ângulos opostos somam 180° . Portanto, $\beta + \gamma + B\hat{Z}C = 180^\circ$, ou seja, o ângulo $B\hat{Z}C = 180^\circ - (\beta + \gamma)$.

Se tivermos,

$$\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma)$$

$$B\hat{Z}C = \alpha.$$

Prosseguindo, ainda meio confuso e sem um encaixe perfeito em seus cálculos, Heron, com sua genialidade, começou então a encontrar pares de triângulos semelhantes e a obter importantes conclusões sobre eles. Os dois primeiros alvos foram os triângulos APK e CBZ , que são semelhantes, pois ambos são retângulos e têm um de seus ângulos internos medindo α .

Portanto, podemos definir assim as seguintes proporções entre eles:

$$\frac{BC}{BZ} = \frac{AP}{KP} = \frac{BG}{r} \quad (35)$$

Essa relação se confirma, pois $AP = AQ = BG = (p - a)$ e $KP = r$, ou então,

$$\frac{BC}{BG} = \frac{BZ}{r} \quad (36)$$

Depois foi a vez de verificar que os triângulos BYZ e YKR são semelhantes, pois os dois também são retângulos e têm ângulos com vértices em Y iguais. Logo temos:

$$\frac{BZ}{BY} = \frac{KR}{YR} = \frac{r}{YR} \quad \text{ou} \quad \frac{BZ}{r} = \frac{BY}{YR} \quad (37)$$

De (36) e (37) conclui-se que:

$$\frac{BC}{BG} = \frac{BY}{BR} \quad (38)$$

“Por construção, o triângulo KYC é retângulo. Logo, o quadrado da altura em relação à hipotenusa é igual ao produto das projeções dos catetos sobre eles”. (GARBI, 2010, p. 118).

Ou seja,

$$(KR)^2 = (YR) \cdot (CR), \text{ onde } KR = r, \text{ obtemos portanto}$$

$$(r)^2 = (YR) \cdot (CR) \quad (39)$$

Heron, toma então a igualdade (38) e soma 1 a ambos os termos, obtendo assim:

$$\frac{BC}{BG} + 1 = \frac{BY}{YR} + 1$$

Tirando o Mínimo múltiplo comum em ambos os lados da equação, temos:

$$\frac{BC + CG}{BG} = \frac{BY + YR}{YR} \quad (40)$$

De acordo com a Figura 2.1, podemos estabelecer as seguintes relações:

$$BC + BG = CG \text{ e } BY + YR = BR \quad (41)$$

Onde, podemos escrever que o todo $\overline{CG}$ está para o segmento $\overline{BG}$ assim como $\overline{BR}$ está para sua parte $\overline{YR}$:

$$\frac{CG}{BG} = \frac{BR}{YR} \quad (42)$$

Heron então multiplicou o lado esquerdo da igualdade (41) por:

$$\frac{CG}{CG} = 1$$

E o fez semelhante no lado direito da igualdade (42), multiplicando-a por:

$$\frac{CR}{CR} = 1$$

O que não altera de forma alguma o resultado final, obtendo:

$$\frac{CG \cdot CG}{BG \cdot CG} = \frac{BR \cdot CR}{YR \cdot CR} \quad (43)$$

Como, na equação (39), temos:

$$YR \cdot CR = r^2$$

Substituindo (39) em (43), teremos:

$$\frac{CG \cdot CG}{BG \cdot CG} = \frac{BR \cdot CR}{r^2} \quad (44)$$

Revista Mirante, Anápolis (GO), v. 17, n. 1, p. 191-209, dez. 2024. ISSN 1981-4089
Efetuando a multiplicação cruzada, encontramos:

$$r^2 \cdot CG \cdot CG = CG \cdot CR \cdot BR \cdot BG \quad (45)$$

Portanto, retomando respectivamente as equações (33), (30), (29), (31), temos:

$$CG = p$$

$$CR = (p - c)$$

$$BR = (p - b)$$

$$BG = AP = (p - a)$$

Iremos agora substituir as igualdades (33), (30), (29) e (31) na equação (45) e, enfim encontraremos a brilhante fórmula de Heron para o cálculo da área de triângulos quaisquer, conhecendo as medidas de seus três lados.

$$r^2 \cdot p^2 = p(p - a)(p - b)(p - c)$$

$$\sqrt{r^2 \cdot p^2} = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

$$r \cdot p = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} \quad (46)$$

Logo, como descrito em (8)

$$S = r \cdot p$$

Finalmente, substituindo (8) em (46), concluímos que:

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

Trata-se de um belíssimo desfecho de uma longa cadeia de raciocínios em que, em alguns momentos, tem-se a sensação de que Heron está vagando sem rumo, perdido à procura de algo que não sabe o que é. Repentinamente, entretanto, a notável fórmula surge, exprimindo um dos mais belos teoremas da Geometria. (GARBI, 2010, p. 116).

A Fórmula de Heron, que permite calcular a área de um triângulo com base apenas nas medidas de seus lados, é um exemplo claro de sua habilidade para resolver problemas geométricos complexos de maneira inovadora e intuitiva. Apesar das controvérsias históricas, como o comentário de al-Biruni sobre Arquimedes, o consenso acadêmico atual reforça o reconhecimento de Heron como o verdadeiro

descobridor da fórmula que leva seu nome. Sua fórmula não só destaca a precisão matemática de seu trabalho, mas também reflete a profundidade de seu entendimento da Geometria.

Aplicações do teorema de heron

Uma aplicação da Fórmula de Heron no Teorema de Pitágoras.

Pitágoras de Samos, um dos mais famosos matemáticos de todos os tempos, emprestou seu nome a um dos teoremas mais conhecidos e utilizados na matemática e em todas as ciências exatas.

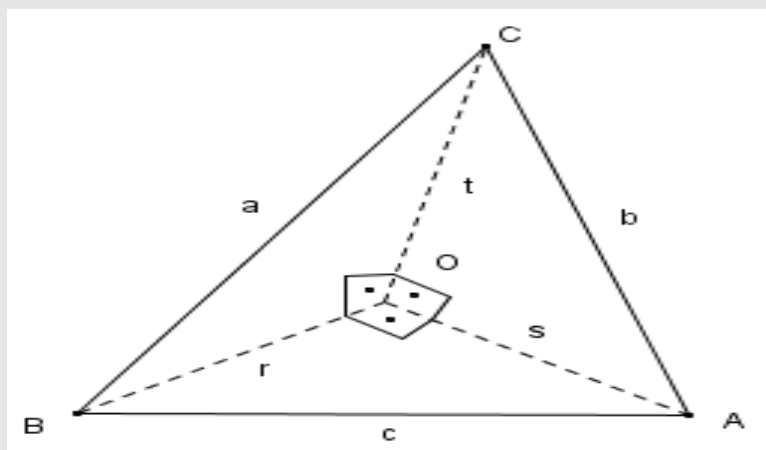
O teorema de Pitágoras diz que, Segundo Garbi (2010, p. 27) “Em qualquer triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos”.

Considere agora a seguinte generalização do teorema de Pitágoras aplicado em um tetraedro tri-retângulo.

“O quadrado da área da face oposta é igual à soma dos quadrados das áreas das outras três faces”.

Veja a figura abaixo:

Figura 3: Tetraedro Tri-retângulo



Fonte: VOGT, 2004

Resolução:

Pela Fórmula de Heron, vamos calcular a área S do triângulo ABC , de lados, a, b e c .

$$S = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)} \quad (1)$$

Usando o teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos, BCO, ACO e BAO , temos:

$$a^2 = r^2 + t^2 \quad (2)$$

$$b^2 = s^2 + t^2 \quad (3)$$

$$c^2 = r^2 + s^2 \quad (4)$$

Elevando ambos os lados da equação (1) ao quadrado, temos:

$$S^2 = p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c) \quad (5)$$

Chamando o semi-perímetro do triângulo ABC de p , obtemos:

$$p = \frac{a + b + c}{2} \quad (6)$$

E substituindo (6) em (5):

$$\begin{aligned} S^2 &= \left(\frac{a + b + c}{2}\right) \cdot \left(\frac{a + b + c}{2} - a\right) \cdot \left(\frac{a + b + c}{2} - b\right) \cdot \left(\frac{a + b + c}{2} - c\right) \\ S^2 &= \left(\frac{a + b + c}{2}\right) \cdot \left(\frac{b + c - a}{2}\right) \cdot \left(\frac{a + c - b}{2}\right) \cdot \left(\frac{a + b - c}{2}\right) \\ S^2 &= \frac{[(a + b + c) \cdot (b + c - a) \cdot (a + c - b) \cdot (a + b - c)]}{16} \end{aligned} \quad (7)$$

Encontrando o Mínimo Múltiplo Comum em ambos os termos da equação (7), temos:

$$16 \cdot S^2 = \{[(a + b + c) \cdot (b + c - a)] \cdot [(a + c - b) \cdot (a + b - c)]\} \quad (8)$$

Organizando os termos e, efetuando as simplificações necessárias, encontramos:

$$\begin{aligned} 16 \cdot S^2 &= 2 \cdot a^2 \cdot b^2 + 2 \cdot a^2 \cdot c^2 + 2 \cdot b^2 \cdot c^2 - a^4 - b^4 - c^4 \\ 16 \cdot S^2 &= 2 \cdot (a^2 \cdot b^2 + a^2 \cdot c^2 + b^2 \cdot c^2) - a^4 - b^4 - c^4 \end{aligned} \quad (9)$$

Desenvolvendo por partes os termos entre parênteses na equação (9), e em seguida substituindo-os nas equações (2), (3) e (4) teremos seis relações em função dos lados r , s e t do Tetraedro, são elas:

$$a^2 \cdot b^2 = (r^2 + t^2) \cdot (s^2 + t^2) = (t^4 + t^2 \cdot s^2 + t^2 \cdot r^2 + r^2 \cdot s^2) \quad (10)$$

Multiplicando (2) por (3), encontramos a equação (10), o que analogamente ocorre nas equações de (11) a (15).

$$a^2 \cdot c^2 = (r^2 + t^2) \cdot (r^2 + s^2) = (r^4 + t^2 \cdot s^2 + t^2 \cdot r^2 + r^2 \cdot s^2) \quad (11)$$

$$c^2 \cdot b^2 = (t^2 + s^2) \cdot (r^2 + s^2) = (s^4 + t^2 \cdot s^2 + t^2 \cdot r^2 + r^2 \cdot s^2) \quad (12)$$

$$a^4 = (t^2 + r^2) \cdot (t^2 + r^2) = t^4 + 2 \cdot t^2 \cdot r^2 + s^4 \quad (13)$$

$$b^4 = (t^2 + s^2) \cdot (t^2 + s^2) = t^4 + 2 \cdot t^2 \cdot s^2 + s^4 \quad (14)$$

$$c^4 = (r^2 + s^2) \cdot (r^2 + s^2) = r^4 + 2 \cdot r^2 \cdot s^2 + s^4 \quad (15)$$

Por fim, substituímos as equações (10) a (15) na equação (9) e, obtemos:

$$16 \cdot S^2 = 4 \cdot t^2 \cdot s^2 + 4 \cdot t^2 \cdot r^2 + 4 \cdot r^2 \cdot s^2 \quad (16)$$

Dividindo ambos os lados da equação por 16:

$$16 \cdot \frac{S^2}{16} = \frac{4 \cdot t^2 \cdot s^2}{16} + \frac{4 \cdot t^2 \cdot r^2}{16} + \frac{4 \cdot r^2 \cdot s^2}{16}$$

Simplificando:

$$S^2 = \frac{t^2 \cdot s^2}{4} + \frac{t^2 \cdot r^2}{4} + \frac{r^2 \cdot s^2}{4} \quad (17)$$

Vamos observar agora que:

$$T_1 = \text{Área do triângulo BCO} = \frac{r \cdot t}{2} \Rightarrow T_1^2 = \frac{r^2 \cdot t^2}{4} \quad (18)$$

$$T_2 = \text{Área do triângulo BAO} = \frac{r \cdot s}{2} \Rightarrow T_2^2 = \frac{r^2 \cdot s^2}{4} \quad (19)$$

$$T_3 = \text{Área do triângulo ACO} = \frac{s \cdot t}{2} \Rightarrow T_3^2 = \frac{s^2 \cdot t^2}{4} \quad (20)$$

Substituindo as equações (18), (19) e (20) na equação (17), concluímos que:

$$S^2 = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2$$

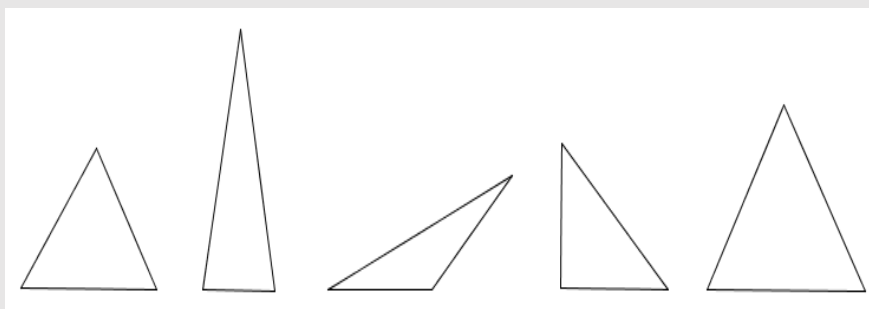
A integração da Fórmula de Heron com o Teorema de Pitágoras em um tetraedro tri-retângulo revela a riqueza das relações geométricas e fornece um método robusto para analisar e validar propriedades de formas tridimensionais complexas. Essa aplicação demonstra como ferramentas matemáticas distintas podem ser combinadas para ampliar nossa compreensão de conceitos geométricos e suas aplicações práticas.

O problema do barbante para a construção do triângulo de maior área.

Um barbante com medida l é usado para construir triângulos, com mesmo perímetro, porém com dimensões diferentes. Pergunta-se: qual a classificação do triângulo e sua área máxima.

Para responder a questão, observe que é possível construir inúmeros triângulos com um barbante de comprimento l .

Figura 4: Triângulos diversos



Fonte: VOGT, 2004

Usando a Fórmula de Heron para calcular a área de um triângulo ABC qualquer, de lados medindo a, b e c , temos:

$$S = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)} \quad (1)$$

Colocando $\sqrt{p}$ em evidência, temos:

$$S = \sqrt{p} \cdot \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)} \quad (2)$$

Como o perímetro do triângulo é l (comprimento do barbante), o semi-perímetro mede:

$$p = \frac{l}{2} \quad (3)$$

Substituindo (3) em $\sqrt{p}$ na equação (2), temos:

$$S = \sqrt{\frac{l}{2}} \cdot \sqrt{(p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)} \quad (4)$$

A área S do triângulo ABC será máxima quando

$$\sqrt{(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} \quad (5)$$

tiver valor máximo.

Utilizando a desigualdade entre a Média Geométrica, $MG = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$ e a Média Aritmética, $(M.A) = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$, de acordo com Lima (2006), casos os números positivos $x_1, x_2, \dots, x_n$, não forem todos iguais, teremos $M.G < M.A$. A igualdade $M.G = M.A$, só será válida quando os números positivos $x_1, x_2, \dots, x_n$, forem todos iguais.

Fazendo a desigualdade para $n = 3$ e substituindo, $x_1 = (p-a)$, $x_2 = (p-b)$ e $x_3 = (p-c)$, encontramos:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} &\leq \frac{[(p-a) + (p-b) + (p-c)]}{3} \\ \sqrt[3]{(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} &\leq \frac{[3 \cdot p - (a+b+c)]}{3} \\ \sqrt[3]{(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} &\leq p - \frac{a+b+c}{3} \end{aligned} \quad (6)$$

Como o perímetro do triângulo ABC é:

$$(a+b+c) = l \quad (7)$$

Substituindo (3) e (7) no segundo termo da inequação (6), temos:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} &\leq \frac{l}{2} - \frac{l}{3} \\ \sqrt[3]{(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} &\leq \frac{l}{2} - \frac{l}{3} \\ \sqrt[3]{(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} &\leq \frac{l}{6} \end{aligned} \quad (8)$$

Como a igualdade somente ocorre quando $x_1 = x_2 = x_3$, teremos

$$\begin{aligned} (p-a) &= (p-b) = (p-c) \\ a &= b = c \end{aligned} \quad (9)$$

Elevando ambos os lados da equação (8) ao cubo, obtemos:

$$(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c) \leq \left(\frac{l}{6}\right)^3 \quad (10)$$

Revista Mirante, Anápolis (GO), v. 17, n. 1, p. 191-209, dez. 2024. ISSN 1981-4089

Como a igualdade só vale quando $a = b = c$, só terá validade quando for um triângulo equilátero.

Portanto a área máxima do triângulo ABC é

$$S_{ABC} = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

Onde em (3),

$$p = \frac{l}{2}$$

e o perímetro do triângulo ABC é l , então:

$$a = b = c = \frac{l}{3} \quad (11)$$

Substituindo (3) e (11), em (1), concluímos que:

$$S_{ABC} = \sqrt{\frac{l}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{3}\right) \cdot \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{3}\right) \cdot \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{3}\right)}$$

$$S_{ABC} = \sqrt{\frac{l}{2} \cdot \left(\frac{l}{6}\right) \cdot \left(\frac{l}{6}\right) \cdot \left(\frac{l}{6}\right)}$$

$$S_{ABC} = \sqrt{\frac{l^4}{432}}$$

$$S_{ABC} = \frac{l^2}{12 \cdot \sqrt{3}}$$

$$S_{ABC} = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{36}$$

Portanto, ao responder à questão sobre a classificação do triângulo e sua área máxima, a conclusão é que, para qualquer barbante de comprimento l , o triângulo que terá a maior área é o triângulo equilátero com lados iguais a $\frac{l}{3}$. Esta conclusão não apenas resolve o problema prático de maximização da área, mas também ilustra a aplicação eficiente de conceitos matemáticos fundamentais em problemas de otimização. Em suma, a combinação da Fórmula de Heron com o problema do barbante revela a beleza e a utilidade

das ferramentas matemáticas na resolução de questões geométricas complexas, destacando a importância da geometria na compreensão e otimização das formas que encontramos em diversas aplicações práticas.

Conclusão

O estudo da História da matemática é importantíssimo para uma compreensão mais simples e digna dos Cálculos e métodos, que foram desenvolvidos por grandes estudiosos durante séculos. É como se dentro da sala de aula o professor pudesse voltar no tempo e questionar como o homem determinava com exatidão áreas de terrenos sem ter em mãos objetos que temos hoje para este mesmo fim. Podemos estimular nossos alunos sugerindo que façam o mesmo, utilizando métodos naturais sem o auxílio de objetos prontos que temos atualmente.

Em se tratando da geniosa demonstração de Heron de Alexandria, fica realmente clara a complexidade de seus cálculos e, seria injusto apresentá-la em uma sala de aula do Ensino Médio. Contudo o teorema de Heron é importantíssimo, pois em muitos casos não se conhece a base nem a altura do triângulo no qual se deseja encontrar sua área. Isso acontece geralmente em triângulos escalenos, os quais possuem os três lados e os três ângulos com medidas diferentes. Daí, conhecendo-se as medidas de seus três lados, podemos descartar o uso de sua base e sua respectiva altura.

Sua difícil construção nada mais é do que uma aplicação de conceitos matemáticos importantes para o ensino fundamental. Do mesmo modo podemos citar as aplicações feitas neste trabalho, citando a dificuldade no desenvolvimento de seus cálculos, porém tudo isso com o simples intuito de mostrar uma sequência bem organizada, de conceitos simples estudados no dia-a-dia, que resultam em um aprendizado contínuo do conteúdo ali presente.

Referências

BICUDO, I., **Os Elementos: Euclides**, Ed. UNESP, São Paulo, 2009.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 1º ed. Lisboa. Gradiva, 1951.

CAJORI, F., **Uma História da Matemática**, Ed. Ciência Moderna Ltda, Rio de Janeiro, 2007

CONTADOR, P. R. M.. **Matemática, uma breve história: vol. 1**, Ed. Komedi, Campinas-SP, 2004.

GARBI, G. G., **A Rainha das Ciências: um passeio pelo maravilhoso mundo da matemática**, Ed. Livraria da Física, São Paulo, 2010.

VOGT, M. **Pitágoras, Heron, Brahmagupta-fórmulas; provas, áreas; aplicações**. Monografia. Universidade Federal de Santa Catarina, 2004.