Revista Mirante, Anápolis (GO), v. 17, n. 2, p. 175-190, dez. 2024. ISSN 1981-4089

O ENSINO DO CONCEITO DE NÚMERO IRRACIONAL

TEACHING THE CONCEPT OF IRRATIONAL NUMBER

LEONARDO ANTÔNIO SOUTO
Universidade Estadual de Goiás
leonardosouto12@yahoo.com.br

DUELCI APARECIDO DE FREITAS VAZ
Pontífice Universidade Católica de Goiás
duelci.vaz@gmail.com

DONIZETH HENRIQUE ALELUIA VIEIRA
Escola Municipal de Senador Canedo
dhaleluia@hotmail.com

BEATRIZ DOS SANTOS OLIVEIRA
Escola Estadual Dr. Ornelo Machado
beatrizsantos8462@gmail.com

Resumo: Problematizamos o ensino-aprendizagem dos números irracionais nas escolas brasileiras. Tal problematização é importante, pois há complicações até mesmo nos trabalhos acadêmicos no contexto da pós-graduação, com proposições que distorcem o caráter geral do conceito, concebendo-o por relação entre grandezas comensuráveis, sem se atentar para os obstáculos que a matemática vivenciou e a superação desta noção de que há outras grandezas a se considerar, como as incomensuráveis. Nosso objetivo é analisar o ensino dos números irracionais, mostrando a sua importância para a construção dos números reais, numa proposição de um ensino-aprendizagem que supere a abordagem que está sendo desenvolvida, a partir de um conhecimento empírico, em detrimento de um conhecimento científico. Para atingir tal objetivo, realizamos um estudo dos números reais mostrando a necessidade dos números irracionais. Contextualizamos o estudo relacionando-o a legislação vigente, de uma análise da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) para compreender como é abordado esse conteúdo nos documentos oficiais. A partir disso, faremos uma proposta de ensino-aprendizagem para ser aplicada na primeira série do Ensino Médio em três aulas. Esta proposta tem o objetivo de contribuir para o ensino de números irracionais, procurando construir o conhecimento a partir de alguns fatos históricos. Neste sentido buscamos produzir com esta pesquisa contribuições para a formação do conhecimento matemático relativo ao conceito de números reais.

Palavras chaves: Números reais. Números irracionais. BNCC.

Abstract: We problematize the teaching-learning of irrational numbers in Brazilian schools. Such problematization is important, as there are complications even in academic work in the context of postgraduate studies, with propositions that distort the general character of the concept, with propositions that this concept can be conceived by a relationship between commensurable quantities, without paying attention to the obstacles that mathematics has experienced and overcoming this notion that other quantities to consider, such as incommensurable ones. Our objective is to analyze the teaching of irrational numbers, showing their importance for the construction of real numbers, in a teaching-learning proposition that goes beyond the question approach being developed, based on empirical knowledge, to the detriment of scientific

knowledge. To achieve this objective, we carried out a study of real numbers showing the need for irrational numbers. We contextualized the study by relating it to current legislation, an analysis of the National Common Curricular Base (BNCC) and the National Textbook Plan (PNLD) to understand how this content is covered in official documents. From this, we will make a teaching-learning proposal to be applied in the first year of high school in three classes. This proposal aims to contribute to the teaching of irrational numbers, seeking to build knowledge based on some historical facts. In this sense, we seek to produce contributions to the formation of the mathematical concept related to the concept of real numbers with this research.
Keywords: Real numbers. Irrational numbers. BNCC

Introdução

Em geral, quando temos contato com alunos do ensino médio ou até mesmo com as primeiras turmas dos cursos superiores e comentamos sobre os números reais, percebemos que muitos acham que os números irracionais são apenas as raízes não exatas e o número π (CAMARGO, 2003). Isso nos mostra uma problemática do ensino-aprendizagem dos números reais na educação básica. O ensino dos números reais na escola básica nem sempre abrange assuntos importantes e curiosos, como o conjunto dos números naturais ter a mesma quantidade do conjunto dos números racionais e inteiros e a importância que o conjunto dos números irracionais possui na construção da reta real.

Bartolomeu (2010) relata que essa dificuldade do ensino-aprendizagem dos números reais são alvos de pesquisas realizadas por estudiosos na área de Educação Matemática, constatando que os alunos apresentam uma defasagem de conhecimento numérico, principalmente na classificação dos racionais e irracionais. Mendes (2012), por exemplo, nos indica que muitas vezes os alunos

> [...] não conseguem distinguir a diferença entre um número racional e um irracional; números com infinitas casas decimais periódicas são confundidos com irracionais; não há uma ideia formada sobre o infinito; não há uma justificativa para adquirir conhecimentos sobre os números irracionais (MENDES, 2012, p. 29).

Os números irracionais são essenciais na formação dos números reais, e geralmente são trabalhados de forma rápida e superficial na escola básica, os alunos não veem sua real importância e o quanto esse conjunto é grande, indo muito além de só raízes não exatas.

Dentro do conjunto dos números reais, temos os números naturais, inteiros, racionais e irracionais, que são utilizados em operações básicas cotidianamente, pelo processo de contagem ou de medição, sendo assim importante seu estudo na educação

Revista Mirante, Anápolis (GO), v. 17, n. 1, p. 175-190, dez. 2024. ISSN 1981-4089

formal. Além disso, para quem deseja continuar estudando na área de exatas, a aprendizagem de números reais se torna mais importante ainda, para compreender a completude da reta e a noção de continuidade, que fazem parte da disciplina de Cálculo, matemática avançada, entre outras.

Para verificar como esses números são ensinados na Educação Básica, faremos uma fundamentação teórica do ensino dos números reais, para isso, será feita uma análise na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e no Plano Nacional do Livro Didático (PNLD), além de uma análise de seu movimento lógico-histórico. Contrapondo movimento científico e legislação.

Por último, propomos uma possibilidade de ensino para o conceito de números reais, com ênfase nos números irracionais, considerando os desafios históricos para o problema causados pelo aparecimento dos números irracionais, visando desenvolver nos alunos a compreensão dos nexos internos e externos deste conceito por meio das ações na resolução das atividades propostas.

Os nexos internos e externos relativos aos números racionais e irracionais é o seguinte: Se um número é racional, então ele admite representação decimal finita ou periódica infinita. Se for atribuído significado matemático a uma representação decimal infinita e não periódica, então ela não é a representação de um número racional, logo ele será um número irracional (NIVEN, 1984). Faremos uma análise a partir de pesquisas bibliográficas considerando autores que são importantes para nossos objetivos específicos. Esperamos que este trabalho seja útil e contribua ao debate acadêmico.

O ensino dos números reais segundo a bncc e o pndl

Criada em 2015, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) passou por várias implementações até chegar a que temos hoje, sua terceira versão. É um documento de caráter normativo que define o conteúdo e progresso de aprendizagens que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da educação básica (BRASIL, 2018).

No processo da construção dos números, segundo a BNCC (2018) os alunos precisam desenvolver as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções consideradas fundamentais da matemática. “

Revista Mirante, Anápolis (GO), v. 17, n. 1, p. 175-190, dez. 2024. ISSN 1981-4089

> Para essa construção, é importante propor, por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos. No estudo desses campos numéricos, devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações" (BRASIL, 2018, p. 268).

Para o aprofundamento da noção de número, a BNCC (2018) diz que é importante colocar os alunos diante de problemas, sobretudo os geométricos, nos quais os números racionais não são suficientes para resolvê-los, de modo que eles reconheçam a necessidade de outros números: os irracionais.

Os números irracionais e reais são introduzidos no nono ano do ensino fundamental, no qual se espera que ao seu término o aluno saiba reconhecer um número irracional como sendo um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica e que saiba estimar a localização de alguns deles na reta numérica (BRASIL, 2018). Com relação aos números reais, o aluno precisa ter a ideia de que os números racionais não são suficientes para ter a completude da reta, por isso é necessário defini-lo como a união dos racionais com os irracionais.

No ensino médio, segundo a BNCC (2018), a área de Matemática tem a responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes, para assim aprofundar e ampliar o conteúdo iniciado na etapa anterior. Esse aprofundamento deve ocorrer principalmente no conjunto dos números irracionais, pois ele é trabalhado de forma rápida no ensino fundamental, devido as dificuldades dos alunos desta faixa etária de compreender este conceito.

Além disso, segundo o PNLD (2018), o estudo da representação decimal dos números racionais e dos irracionais é um assunto importante no ensino médio e é possível abordá-lo de modo acessível e com razoável rigor matemático.

Para que o aluno entenda a representação decimal do número irracional, antes ele precisa saber a representação decimal do número racional, é através dela que chegaremos à representação do número irracional. Um número racional é aquele que pode ser escrito da forma $\frac{a}{b}$, com b diferente de zero.

A representação decimal de um número é outra forma de escrevê-lo. Segundo Niven (1984), as representações decimais de alguns números racionais são finitas, por exemplo:$\frac{1}{2} = 0{,}5$; $\frac{2}{5} = 0{,}4$; $\frac{1}{80} = 0{,}0125$ ou têm representação infinita, neste caso são

Revista Mirante, Anápolis (GO), v. 17, n. 1, p. 175-190, dez. 2024. ISSN 1981-4089

as chamadas dízimas periódicas. Por exemplo: $\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$; $\frac{1}{6} = 0{,}16666\ldots$; $\frac{5}{11} = 0{,}454545\ldots$.

Essas representações decimais são obtidas a partir de frações, dividindo-se numerador pelo denominador. Mas, quais são os números decimais que podem ser expressos por uma frações. Temos o seguinte resultado cuja demonstração pode ser encontrado no livro do Niven (1984):

Todo número racional $\frac{a}{b}$ tem representação decimal finita ou uma representação decimal infinita periódica; reciprocamente, todo número que possui uma representação decimal finita ou periódica infinita representa um número racional $\frac{a}{b}$.

Assim, se for atribuído significado matemático a uma representação decimal infinita e não periódica, então ela não é a representação de um número racional, portanto, será um número irracional.

Utilizar esse resultado tem sido um caminho adotado para introduzir os números irracionais no ensino básico, mas ainda são observado algumas lacunas no percurso. Uma delas é a omissão da demonstração da sua representação e a outra lacuna é não mencionar que é possível atribuir um significado matemático a uma representação decimal infinita e não periódica (BRASIL, 2018).

Com essas discussões fica comprovada a caracterização mais encontrada nos livros para os números irracionais: um número é irracional, se e somente se, sua representação decimal é infinita e não periódica, ou seja, um número irracional é uma consequência dele não ser racional.

O conjunto dos números irracionais é maior do que o conjunto dos números racionais e uma forma de mostrar isso ao aluno é demonstrando as diversas possibilidades de se produzir um número irracional a partir de um número racional, que pode ser feita recorrendo-se às raízes quadradas de inteiros positivos que não sejam quadrados perfeitos.

Poucos exemplos são oferecidos aos estudantes no ensino, logo ele é levado a pensar erroneamente que “os números irracionais são relativamente raros”. É importante trabalhar com formas de gerar outros números irracionais, para que o aluno perceba a abundância desse conjunto numérico.

Por exemplo, $\sqrt{2}$ é um número irracional, a demonstração deste fato é encontrada

Revista Mirante, Anápolis (GO), v. 17, n. 1, p. 175-190, dez. 2024. ISSN 1981-4089

em Niven (1984). Somando-se qualquer número racional a $\sqrt{2}$, o resultado é um número irracional (NIVEN, 1984). Portanto podemos construir uma infinidade de números irracionais somente utilizando a $\sqrt{2}$. A seguir faremos uma proposta de ensino para conceituar os números reais, com foco nos números irracionais.

Proposta de ensino de números irracionais

Em nossa tradição escolar, geralmente o professor apresenta esse conhecimento científico de forma descritiva. Mas para Davydov (1988) representa uma metodologia insuficiente, pois opera apenas o aparente do conceito, não esclarece o aspecto nuclear do conceito. É necessário que a atividade estimule a capacidade de pensar, sendo capaz de, a partir de uma situação planejada, permitir que o aluno entenda o seu porquê. Para ensinar números irracionais, a atividade deve permitir ao aluno compreender essencialmente por que o matemático define esse conteúdo daquela forma. Portanto, o objeto é explicado pelo seu movimento lógico e histórico e a atividade proposta deve ser planejada incluindo esse pressuposto, permitindo ao aluno apropriá-lo, percebendo os motivos de sua criação e permanência na ciência.

O professor busca o princípio geral do objeto, com a finalidade de que o aluno compreenda esse princípio, inicialmente aplicando-o a situações particulares. Permitindo ao aluno acessar o núcleo do objeto (Davydov, 1988). Isso é algo plausível e importante para o ensino da Matemática, pois os objetos matemáticos possuem núcleos e essências bem definidas e uma história, sendo um trabalho possível no contexto escolar.

Segundo Davydov (1988), a atividade de aprendizagem consiste na organização e proposição, pelo professor, de um conjunto de tarefas que poderão levar o aluno a formar diversos conceitos que, inter-relacionados, compõem um dos conteúdos de uma determinada área do conhecimento a ser aprendida. O professor, ao considerar as características psicológicas, culturais e sociais de seus alunos, proporá atividades integradoras de modo a levar em consideração a transformação do pensamento empírico de seu aluno em pensamento científico. A atividade tem este objetivo (DAVYDOV, 1988).

Revista Mirante, Anápolis (GO), v. 17, n. 1, p. 175-190, dez. 2024. ISSN 1981-4089

Nesta proposta, um problema histórico é relacionado ao respectivo conteúdo para demonstrar que, apesar dos conhecimentos atuais terem sido descobertos de forma desconexa e fora da ordem, pode-se utilizar da História para que fatos ocorridos, como o dos incomensuráveis, contribuam para a construção do conhecimento de números irracionais.

No planejamento de uma aula introduzindo os números irracionais, o objetivo geral desta aula é mostrar a importância dos números irracionais na definição dos números reais. Os objetivos específicos estão relacionados a: demonstração de problemas históricos na descoberta de números não racionais; resolução de situações problema para se encontrar um número irracional; fazer uma correspondência entre os conjuntos dos racionais com os pontos da reta; mostrar que os racionais não completam a reta, necessitando de outro conjunto numérico.

No início da primeira aula mostra-se a importância dos racionais, que são números escritos como a razão entre dois inteiros e que, apesar dos inteiros estarem contidos neste conjunto, existem números que não podem ser escritos da forma racional p/q, com p e q inteiros e primos entre si. Por este motivo, a forma racional não é suficiente para representar todos os números

Posteriormente, inicia-se a construção dos números incomensuráveis. Sugerimos que a aula seja introduzida com o problema de Delos. Conta-se que no templo de Apolo, na ilha de Delos, um oráculo foi procurado para petição da ajuda dos deuses, pois a peste estava ameaçando matar muitos dos cidadãos atenienses. A resposta do oráculo foi de que os deuses pediram para que os sábios resolvessem um problema aparentemente fácil, mas posteriormente descobriu-se que era impossível de resolver, pois os deuses pediram simplesmente para que lhes erguessem um altar que fosse igual ao dobro do já existente, e o mal poderia ser debelado (KARLSON, 1961).

A impressão de facilidade na solução deste problema logo foi abandonada, por se tratar de um problema extremamente complexo. Matematicamente eles deveriam dobrar o tamanho do altar que tinha o formato de um cubo e sua aresta era de tamanho igual a 1m, e consequentemente seu volume era igual a $1m^3$. Mas como eles saberiam a medida da aresta deste novo altar de volume igual a $2m^3$, uma vez que eles só poderiam utilizar-se da régua e do compasso para essa construção? Pois a restrição de que se deveriam utilizar somente da régua e compasso era praticamente uma regra na

Revista Mirante, Anápolis (GO), v. 17, n. 1, p. 175-190, dez. 2024. ISSN 1981-4089

Matemática grega, e dada quase que como um mandamento divino. Obviamente, com os recursos que tinham, este problema não foi resolvido.

Problema 1 – Sendo x o valor da aresta do altar de Delos, o volume do altar seria $x^3 = 1$, assim o volume seria igual a 1 m^3. Determine a aresta deste novo cubo de volume igual a 2 m^3.

Dobrando o volume teremos:

$$x^3 = 2$$
$$x = \sqrt[3]{2}$$

Uma tentativa de calcular este valor é pela aproximação, isto concluiremos que será uma aproximação infinita, chegando à ideia de que este é decimal infinito e não periódico. Pois $1{,}2^3 = 1{,}728$, aproximamos por falta e $1{,}3^3 = 2{,}197$ aproximamos por excesso. Com isto concluímos que será necessário acrescentar mais uma casa em *1,2*. Tentando $1{,}25^3$ teremos um resultado que se aproxima de *2* igual a *1,953125*, e $1{,}26^3$ o resultado de *2,000376* é maior que *2*. Podemos sempre acrescentar mais uma casa decimal no número que se aproxima por falta até que o próprio aluno se convença de que este número é infinito. Aqui o professor pode começar a discussão utilizando um instrumento de medida, por exemplo a régua, e perguntar se o aluno consegue identificar este número na reta. O objetivo deste problema e das discussões que ele propõe é mostrar que o problema de Delos não tinha solução considerando os números existentes na época, ou seja, os racionais.

Sugerimos que o problema seja bem discutido de maneira que os discentes possam compreender que a Matemática se desenvolveu muito a partir da procura pela solução de situações problemas e que, nesta procura, novas e inesperadas descobertas ampliaram os conhecimentos matemáticos no decorrer da História.

Outro problema proposto pode ser o número $\sqrt{2}$, que é a diagonal de um quadrado com lado 1. Este problema se encontra em alguns livros didáticos. Também pode-se tentar resolvê-lo pelo método de aproximação. As discussões devem levar em consideração que este número não pode ser escrito na forma de razão entre dois inteiros primos entre si, ou seja, na forma de uma razão irredutível. A história da Matemática mostra que a concepção dos irracionais pelos matemáticos gregos levou a primeira crise da Matemática. Na Grécia, os pitagóricos concebiam tudo como número racional. Esta

Revista Mirante, Anápolis (GO), v. 17, n. 1, p. 175-190, dez. 2024. ISSN 1981-4089

aula introdutória deve explorar este fato histórico e mostrar como o matemático Eudoxo de Cnido apresentou uma solução para o problema dos incomensuráveis de forma geométrica, ou seja, Eudoxo mostrou que estes números tem lugar na reta e como superar a crise estabelecida.

Na segunda aula mostra-se um dos mais importantes números irracionais, que é o número de ouro, que é representado pela razão áurea. No início da aula, pode-se mostrar alguns exemplos de construções na antiguidade que foram feitas pela razão áurea como por exemplo as figuras 1 e 2. Isso é importante, pois mostra a utilização da Matemática com a arquitetura, as artes e engenharia.

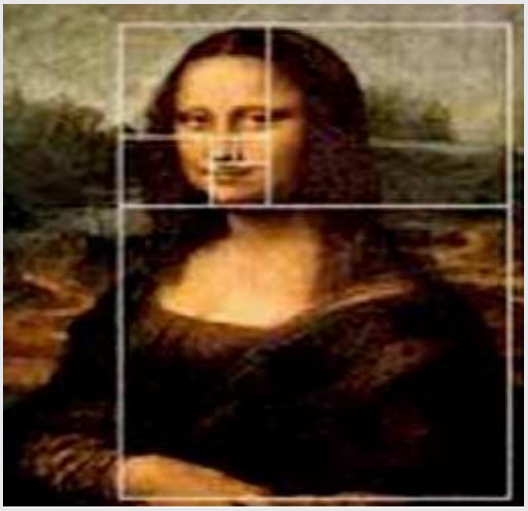
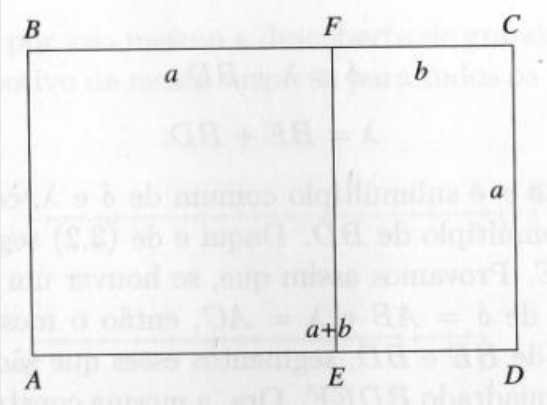


Figura1 – Fonte: http://pegasus.portal.nom.br/proporcao-aurea-e-sequencia-de-fibonacci (a); Figura 2 – Fonte: http://pegasus.portal.nom.br/proporcao-aurea-e-sequencia-de-fibonacci (b)

O retângulo áureo (figura 3) é considerado, desde a antiguidade, como o retângulo perfeito do ponto de vista da estética. Com ele, problematizamos, mais uma vez as grandezas incomensuráveis. Ele é estabelecido quando se tem um retângulo ABCD e se supre um quadrado ABFE, tendo assim um retângulo FECD semelhante ao retângulo ABCD.

Figura 3.

REVISTA MIRANTE
Câmpus Anápolis de Ciências Exatas e Tecnológicas Henrique Santillo
Universidade Estadual de Goiás
Daqui se vê do alto!
Revista Mirante, Anápolis (GO), v. 17, n. 1, p. 175-190, dez. 2024. ISSN 1981-4089



Fonte: Ávila 2006, p. 50.

A definição de retângulo áureo traduz-se na seguinte relação:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \qquad (eq.\ 1)$$

A razão do lado menor pelo lado maior do novo retângulo, é chamada de razão áurea, e representada pela letra grega $\phi = \frac{a}{b}$. Se dividirmos os numeradores e os denominadores da equação 1 por *b* teremos:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \rightarrow \frac{\frac{a+b}{b}}{\frac{a}{b}} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{b}{b}} \rightarrow \frac{\left(\frac{a}{b}\right)+1}{\frac{a}{b}} = \frac{a}{b}$$

Substituindo $\frac{a}{b}$ por ϕ teremos;

$$\frac{\phi+1}{\phi} = \phi \qquad \rightarrow \phi + 1 = \phi^2 \rightarrow \phi^2 - \phi - 1 = 0$$

Fazendo $\phi = x$, para melhor comparação dos alunos, que se torna uma problematização para equações do segundo grau $x^2 - x - 1$, cuja solução nos dá duas raízes não racionais. Como só podemos tomar as raízes positivas desta equação teremos $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, que é aproximadamente 1,618033989..., corresponde a um número incomensurável, e consequentemente irracional.

Como curiosidade, destacamos a existência de diversificações que se pode fazer na *eq. 1* para se obter novos números incomensuráveis. Porém, o que chama mais a atenção dos estudantes, da mesma maneira que conquistou os construtores das arquiteturas gregas está relacionado ao retângulo áureo. Devido a diversidade de retângulos áureos que podem ser inscritos dentro do retângulo áureo inicial. De fato, tendo-se um retângulo áureo de lados $a + b$ e a, também o é o retângulo de lados a e b. O mesmo raciocínio pode se usar para mostrar que também são áureos os retângulos de

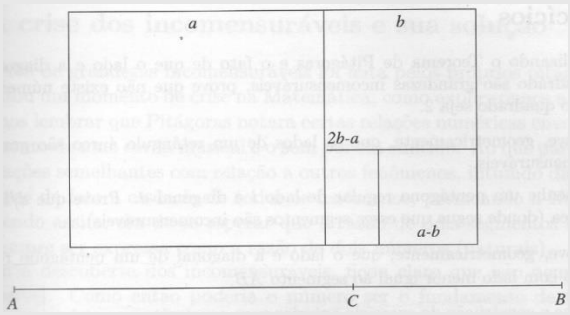
Revista Mirante, Anápolis (GO), v. 17, n. 1, p. 175-190, dez. 2024. ISSN 1981-4089

lados b e $a – b$, $a – b$ e $2b – a$ e assim sucessivamente, conforme podemos ver na *figura 4*. Daí podemos definir que, dados os números positivos a e b que satisfazem a equação *1*, formamos a sequência $a + b$, a, b, a_2, a_3, ..., onde

$a_2 = a – b$, $a_2 = b – a_2 = 2b – a$, ..., de forma que: $a_n = a_{n-2} – a_{n-1}$, ...

Desta forma, quaisquer dois elementos consecutivos da sequência anterior, são os lados de um retângulo áureo, como na figura a seguir.

Figura 4.



Fonte: Ávila 2006, p. 51.

Finaliza-se esta aula falando que estes retângulos dão origem a uma imensidade de conceitos e aplicações matemáticas. Uma delas é a sequência de Fibonnaci, e a teoria dos fractais.

Na terceira e última aula, deve-se enfatizar a importância dos incomensuráveis, que podemos agora chamar de irracionais, para se completar a lacuna na reta. Neste momento é importante destacar que o matemático Richard Dedekind definiu que se fizer um corte na reta podemos separar os racionais em duas partes, esquerda e direita, onde todo número da esquerda é menor que o da direita. Desta forma, se os números à esquerda tiverem um maior elemento, ou os da direita tiverem um menor elemento, este corte determina um número real racional. Caso contrário, este corte determina um número real irracional.

Fazendo uma relação entre os números racionais e os pontos: quanto a infinidade, os pontos da reta são infinitos e o conjunto dos racionais também é; sobre a ordenação, os pontos da reta são ordenados e os racionais também; na densidade, os pontos da reta são densos e o conjunto dos números racionais também são; mas na continuidade, os pontos da reta são contínuos, mas os números racionais não são. Por isto

Revista Mirante, Anápolis (GO), v. 17, n. 1, p. 175-190, dez. 2024. ISSN 1981-4089

se torna importante definir um conjunto numérico que contenha todos os pontos da reta, ou seja, os números reais.

Na segunda parte desta aula o professor pode mostrar, utilizando-se do *software* GeoGebra, a representação destes números na reta. O *software* GeoGebra é um programa livre e pode ser baixado gratuitamente direto do seu site. Foi criado por Markus Hohenwarter para ser utilizado nas escolas e, desde que foi disponibilizado, tem sido uma ferramenta de ensino dinâmica utilizada em diversos países do mundo. Inúmeras pesquisas acadêmicas são realizadas a cada ano sobre as funcionalidades deste recurso, bem como suas contribuições no processo de ensino e aprendizagem.

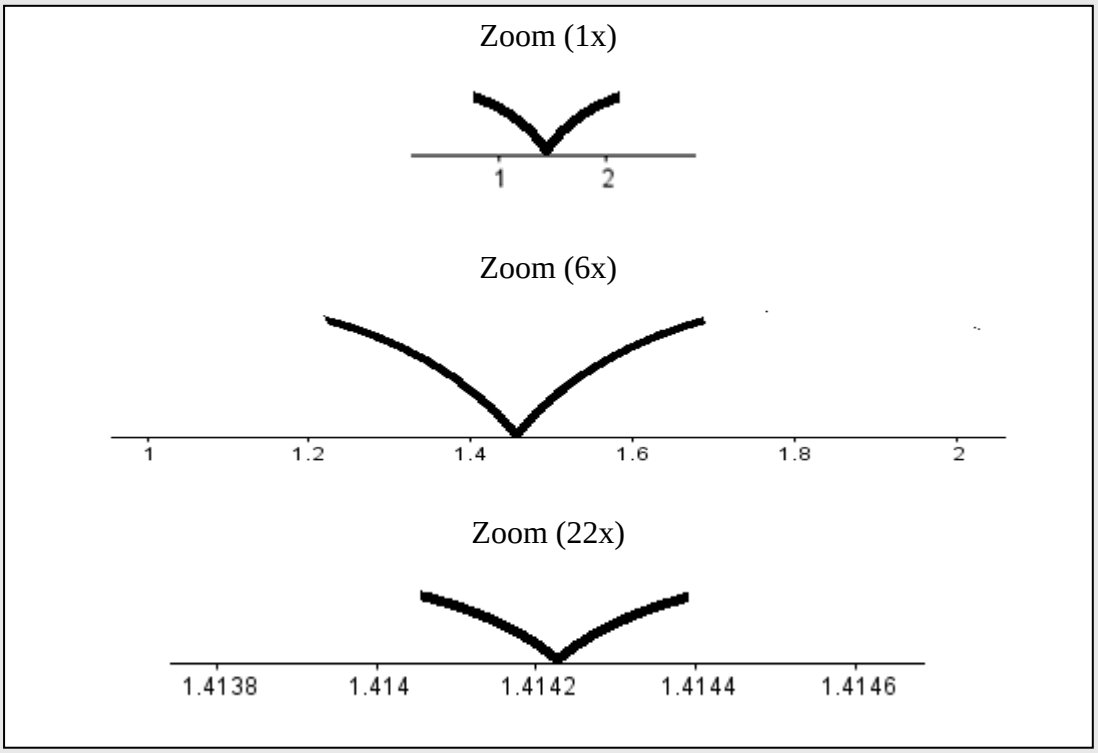
Para Santos (2013, p. 9), "[...] dentre os entes tecnológicos o mais relevante hoje sem dúvida é o computador". Considerando que o acesso ao computador tem aumentado significativamente nas escolas bem como no cotidiano dos alunos, fazer dele uma ferramenta de estudo pode motivar o estudante, um professor bem-preparado pode utilizá-lo na construção de algumas ideias da matemática.

Como o conceito de corte é uma importante teoria da análise real, o docente precisa se atentar para os conhecimentos que os estudantes adquiriram até então. Para não perder a atenção do seu aluno, e proporcionar a compreensão de maneira que cada definição seja feita a partir dos conhecimentos prévios por eles adquirido. Para que este momento seja dinâmico, pode-se utilizar o *software* GeoGebra para mostrar que qualquer ponto da reta, pode-se fazer um corte de forma que esta será dividida em duas partes, esquerda e direita (E, D).

Como visto na figura 5, o software GeoGebra é composto de uma janela algébrica, uma janela geométrica e de uma barra de ferramentas que fica na parte superior. Na barra de ferramentas pode-se ampliar a reta numérica – preferencialmente o eixo das abscissas – para ver o comportamento dos números, possibilitando que se possa ver números entre números. De forma que, toda vez que se faz zoom, novos números aparecem, conforme a figura 6. O zoom máximo no aplicativo é 76 vezes o tamanho normal.

Revista Mirante, Anápolis (GO), v. 17, n. 1, p. 175-190, dez. 2024. ISSN 1981-4089

Figura 5.

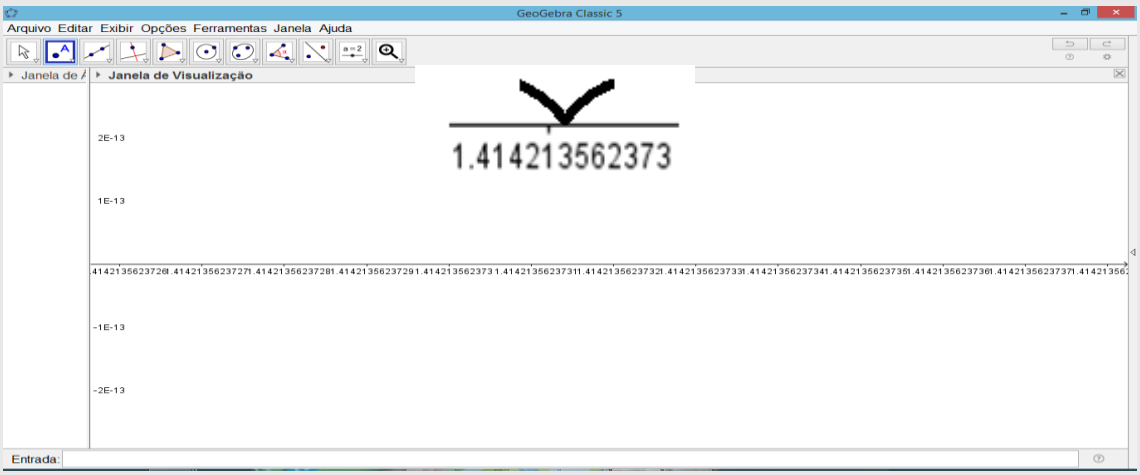


Fonte: Donizeth

Como podemos ver, o número no meio da figura acima se aproxima do valor da raiz quadrada de dois que aparece na calculadora científica, e os números ao lado podem ser tratados como aproximações deste número.

Zoom (76x)

Figura 6



Fonte: Donizeth

Revista Mirante, Anápolis (GO), v. 17, n. 1, p. 175-190, dez. 2024. ISSN 1981-4089

Na figura 6, percebemos que qualquer corte feito na reta pode levar a um número racional ou irracional.

As discussões sobre números devem ser intensificadas neste momento, pois no primeiro zoom, se tem os números naturais e inteiros, a partir da terceira ampliação se pode identificar os números racionais, chegando à máxima ampliação que o computador consegue. O professor finaliza a aula fazendo perguntas como: chegamos ao fim? Existem números com mais casas decimais do que o que se vê? Existem infinitos números entre dois números? Todo ponto da reta é real? Entre outras.

A proposta de ensino, com ênfase nas atividades de estudo para conceituar os números reais, propicia uma mudança explícita como tal conceito é apresentado, pois, no ensino tradicional, o número real é apresentado nas práticas cotidianas, com ênfase nas operações aritméticas. Já a proposta baseada no ensino davydoviano implica uma mudança na metodologia e, consequentemente, na postura do professor, pois a atividade de estudo propicia mobilizar os nexos externos e internos do conceito de número, contemplando as significações aritméticas, geométricas e algébricas, de modo a desenvolver nos alunos o pensamento científico.

Considerações finais

Os números racionais e irracionais causam nos alunos dúvidas e isso gera dificuldades na compreensão dos conjuntos numéricos, onde cada conjunto possui características próprias. Os alunos terminam o ensino médio sem ter um conhecimento completo desse conteúdo. Este fato ocorre por diversos fatores como: o livro didático não abordar o conteúdo de forma apropriada (POMMER, 2012), o professor trabalhar de forma rápida e superficial e a falta de tempo para a preparação de um bom planejamento da aula.

Iniciamos esse artigo, caracterizando o conjunto dos números racionais e dos números irracionais, mostrando suas diferenças e características, fazendo uma análise como esse conteúdo é abordado na BNCC e no PNLD. Entendemos que, a partir desta pesquisa, a preocupação com uma situação problema não será somente em resolvê-la e partir para a próxima, mas os estudos históricos nos ensinam que, quando se tem um problema, se está diante de uma oportunidade de se ampliar o conhecimento de maneira

Revista Mirante, Anápolis (GO), v. 17, n. 1, p. 175-190, dez. 2024. ISSN 1981-4089

consistente, como se deu na crise dos incomensuráveis. Para isto, é importante que a investigação seja feita de maneira cuidadosa e crítica para não se chegar a conclusões equivocadas, considerando sempre que ninguém é dono da verdade, e por isto a opinião própria deve estar sujeita a investigação quanto a veracidade e consistência dos fatos.

Na construção da proposta, foi levado em consideração o ano de formação escolar que seria possível trabalhar o conceito de números reais, que foi a turma do 1º ano do ensino médio. A atividade de aprendizagem está diretamente ligada ao surgimento do conceito dos números reais, que era a dificuldade em medir grandezas que não podiam ser comparadas com uma unidade de medida. A escolha das tarefas de estudo foi pensada de modo a respeitar o contexto sociocultural do aluno, a ligação com o percurso lógico-histórico do objeto e a perspectiva de trabalhar os casos particulares quando os alunos se apropriam da relação geral do conceito de números reais.

Referências

ÁVILA, G. **Análise matemática para licenciatura**. 3. ed. São Paulo: Editora Blücher, 2006.

BARTOLOMEU, V. d. S. **Conhecimentos e dificuldades dos estudantes do ensino médio relacionados ao conjunto dos números reais**. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Ministério da Educação. 2018.

BRASIL. **Plano Nacional do Livro Didático**. Guia de Livros Didáticos – Ensino Médio. Brasília, 2018.

CAMARGO, M. A. **Caracterização dos números racionais e irracionais**. Revista da Olimpíada - IME - UFG, n. 4, p. 75 – 83, 2003. Disponível em: RacionaisIrracionais.pdf (ufg.br). Acesso em: 20 set. 2021.

DAVYDOV, V. V. **Problemas do ensino desenvolvimental - a experiência da pesquisa teórica e experimental na psicologia**. Tradução de José Carlos Libâneo e Raquel A. M. da Madeira Freitas, 1988.

IGLIORI, S. B. C.; Fonseca, R. F. Reflexões sobre a teoria de Conway no ensino e na aprendizagem de números reais. In: FROTA, M. C. R.; BIANCHINI, B. L.; CARVALHO, A. M. T. (Org.). **Marcas da Educação Matemática no Ensino superior**. Editora Papirus. São Paulo, p. 165-186, 2013.

KARLSON, P. **A Magia dos Números.** 1º ed. Porto Alegre. Editora Globo. 1961.

MENDES, S. C. C. **Práticas pedagógicas para o ensino dos Números Irracionais.** Dissertação. Universidade Severino Sombra. Vassouras. 2012. Disponível em: http://www.uss.br/arquivos/posgraduacao/strictosensu/educacaoMatematica/dissertacoes/2012/DISSERTACA_Sonia_Cristina_da_Cruz_Mendes.pdf . Acesso em: 16 mai. 2021.

NIVEN, I. M. **Números: Racionais e Irracionais**. SBM, Rio de Janeiro, 1984.

POMMER, W. M. **A construção de significados dos Números Irracionais no Ensino Básico: Uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos Números Reais.** Tese. Universidade de São Paulo. São Paulo. 2012.

SANTOS, A. C. G. **Uma contribuição ao ensino de números irracionais e de incomensurabilidade para o ensino**. Dissertação de Mestrado – CCT – UFCG. Campina Grande, 2013.