

ESTUDO DO DESLOCAMENTO DE UMA LAJE UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PELA ANALOGIA DE GRELHA

STUDY OF DISPLACEMENT OF A SLAB USING THE FINITE ELEMENT METHOD BY GRID ANALOGY

RAQUEL ALMEIDA NUNES

Engenheira e Pesquisadora IFGoiano - Campus de Rio Verde (GO)
raquel.almeida@estudante.ifgoiano.edu.br

MARCEL WILLIAN REIS SALES

Doutor, Docente e Pesquisador IFGoiano - Campus de Trindade (GO)
marcel.sales@ifgoiano.edu.br

CÁSSIA CAROLINA SANTOS CARNEIRO

Engenheira e Pesquisadora IFGoiano - Campus de Rio Verde (GO)
cassiacarolina05@gmail.com

JOSÉ DE SOUZA SALES

Doutor, Docente e Pesquisador da Universidade Estadual de Goiás - CCET Anápolis
(GO)
jose.sales@ueg.br

LETYCIA CRUVINEL ALMEIDA

Mestranda do IFGoiano - Campus de Rio Verde (GO)
letyia.cruvinel@estudante.ifgoiano.edu.br

Resumo: Os avanços nos mecanismos construtivos, exige do projetista mais conhecimentos na área estrutural, e assim surge a necessidade de aproximar o máximo possível os resultados obtidos no cálculo dos esforços nos diferentes tipos de geometria da laje, tornando esses valores cada vez mais próximos dos que estariam ocorrendo na estrutura. Assim surge o Método Elementos Finitos (MEF), mostrando-se um excelente mecanismo para obter tais resultados. Divide-se o processo em uma geometria qualquer em finitas partes, para se obter os valores de tensão, deformação e deslocamento. Nesta pesquisa, o método foi usado com o intuito de verificar os deslocamentos que ocorrem em uma laje de concreto armado, quando submetida a uma carga pontual. Assim, a medida em que era feito o refinamento da estrutura, o valor do deslocamento tendia a ficar constante, e a validade deste se dava, ao passo que, o erro encontrado com o SAP 2000 (versão 2022) e o MEF se aproximou do valor nulo. O MEF se mostrou uma excelente alternativa para verificar o deslocamento da estrutura, quando submetido a uma carga pontual.

Palavras-chave: MEF. Análise estrutural. Analogia de grelha. Deslocamento.

Abstract: Advances in construction mechanisms require the designer to have more knowledge in the structural area, and thus the need arises to approximate as closely as possible the results obtained in the calculation of efforts in different types of slab geometry, making these values increasingly closer to the that would be occurring in the structure. This is how the Finite Element Method (FEM) appears, proving to be

an excellent mechanism for obtaining such results. The process in any geometry is divided into finite parts, to obtain the values of stress, strain and displacement. In this research, the method was used with the aim of verifying the displacements that occur in a reinforced concrete slab, when subjected to a point load. Thus, as the structure was refined, the displacement value tended to remain constant, and its validity continued, while the error found with the SAP 2000 (version 2022) and the MEF approached the null value. The FEM proved to be an excellent alternative for checking the displacement of the structure when subjected to a point load.

Keywords: MEF. Structural analysis. Grid analogy. Displacement.

Introdução

A engenharia estrutural é a parte da engenharia que é responsável por analisar, planejar, projetar e executar projetos na área da construção civil. Assim, dentro das etapas de execução de um projeto estrutural está a análise do projeto estrutural, que segundo Kassimali (2016), é a previsão do desempenho de uma estrutura quando aplicadas cargas prescritas ou outros efeitos externos, como os movimentos dos apoios e as mudanças da temperatura, dentre outros. Assim a engenharia estrutural é algo recente, que só passou a ser estudada e aos poucos aprofundada a partir do século XVII, antes disso as estruturas eram projetadas se baseando em tentativa e erro, e em conhecimentos de experiências passadas.

Um dos maiores desafios da Engenharia é solucionar problemas estruturais, propondo um modelo de análise que se aproxime ao máximo da estrutura real. O que ocorre é que, tais modelos de análise fazem parte de um conglomerado de formulações propostas pelos Teoremas de Mecânica Geral e estudo da estática. Em vias do exposto, tais postulações trazem uma solução exata, visto que os modelos utilizados, são para estruturas em condições ideais, com formas geométricas conhecidas, assim se torna inviável recorrer a estas postulações, dependendo da magnitude e complexidade da estrutura, de modo que os resultados obtidos não se aproximam dos que realmente estariam acontecendo nesta estrutura (Alves Filho, 2018).

Em vias do exposto, para solucionar os problemas da inviabilidade dos métodos clássicos de obtenção de resultados para estruturas complexas, surge o Método dos Elementos Finitos (MEF) em meados de 1950, quando foram lançados os primeiros computadores. Os fundamentos do MEF já eram conhecidos há algum tempo, no entanto, as ferramentas de cálculos da época, inviabilizavam a sua implementação e utilização (Scremin, 2016).

Desse modo define-se como MEF, um método matemático, no qual um meio contínuo é discretizado (subdividido) em elementos que mantêm as propriedades da parte que os originou. Esses elementos são descritos por equações diferenciais e resolvidos por modelos matemáticos para que sejam obtidos os resultados desejados (Lotti, 2006).

Visando a otimização das atividades, vários programas são aliados ao MEF para solucionar as crescentes problemáticas da análise estrutural, gerando assertividade e produtividade, para eliminar possíveis erros de cálculos. Tais ferramentas se encontram, na maioria dos casos, de forma gratuita na internet, mas vale ressaltar que, muitos deles possuem uma abordagem clássica de entrada e saída de dados na forma de arquivo de texto, como Python, Java Script e linguagem C, mas há outros que fazem a entrada de dados com as características da estrutura e se obtêm os resultados como Ftool, MATLAB, ParaView, VTK, (Borges; Silva; Bezerra, 2016).

Trabalhos de Carneiro (2022), Nunes (2022), Martinez Machado e Wrague Moura (2023), Fava, G (2023) et al. Estudaram e aplicaram o MEF em diversos exemplos, incluindo analogia de grelha para lajes de concreto. Analisaram refinamento, esforços, e qualidade do resultado. Em geral, chegaram à conclusão que o MEF foi capaz de resolver problemas complexos de lajes com analogia de grelha, apresentando boas aproximações, ou seja, com pouco erro. Assim, este é um método que pode ser usado para retirar esforços de lajes e por fim realizar o dimensionamento.

Em vias do exposto, é de pontual importância, avaliar o comportamento de todas as estruturas, em especial o comportamento de lajes maciças, que ao ser submetidas a cargas pontuais, apresenta um deslocamento sobre sua estrutura. Posto isso, com o Método dos Elementos Finitos, é possível validar tais comportamentos, com base em softwares e código de programação.

Método dos elementos finitos

Os métodos analíticos clássicos permitem cálculos com respostas exatas dos dados de deslocamentos e tensão em todos os seus pontos igualmente, o que ocorre é que essas soluções conhecidas, para a maioria das situações reais não são possíveis ser aplicadas. Nesse viés, se torna interessante desenvolver procedimentos que se aproximem dos casos

reais e que podem ser aplicados para qualquer tipo de estrutura, estando dentro de um limite aceitável assim se dá origem ao Método dos Elementos Finitos (Alves Filho, 2018).

Desse modo, para Ferreira (2017), o MEF pode ser aplicado a uma grande variedade de problemas relevantes. Na Mecânica dos Sólidos, pode ser utilizado para resolver problemas de tensões planas, dobragem de placas, sólidos assimétricos, cascas, cascas assimétricas, torção de barras prismáticas, entre outros.

Nesse sentido, conceitua-se o Método dos Elementos Finitos (MEF) como uma análise matemática que consiste na discretização de um meio contínuo em pequenos elementos, mantendo as mesmas propriedades do meio original. Esses elementos são descritos por equações diferenciais e resolvidos por modelos matemáticos, para que sejam obtidos os resultados desejados, podendo ser utilizado em diversas áreas das ciências exatas e biológicas (Lotti, 2006).

Pode-se exemplificar a diferença de caminhos do MEF com os métodos clássicos, Figura 1.

Figura 1: Caminhos percorridos MEF x Modelo Clássico.

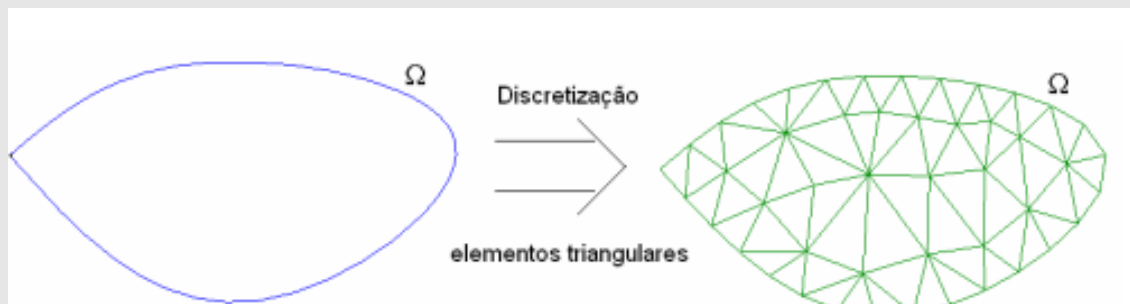


Fonte: Avelino, (2016).

É válido ressaltar, que há possibilidade de discretização se dá tanto para elementos retangulares quanto para elementos triangulares, e o intuito é sempre obter o melhor refinamento possível para se obter mais precisão da geometria a ser estudada, para que o resultado fornecido pelos elementos analisado, seja o mais próximo da realidade. Nesse sentido, o refinamento de malhas é uma importante abordagem utilizada como forma de representação e manipulação de sistemas reais, e quanto mais se refina a estrutura analisada, maior precisão dos resultados será alcançada, ou seja, até que o erro se aproxime de zero. De tal modo, que com MEF se tem a capacidade de subdividir o seu

domínio geométrico de forma consistente, e gerar assim figuras menores (simplexo), tornando a estrutura mais complexa. Essas figuras podem ser vistas como extensões geométricas geradas com a finalidade de tornar a malha mais detalhada. (Fogaça, 2015).

Figura 2: Discretização de uma geometria.



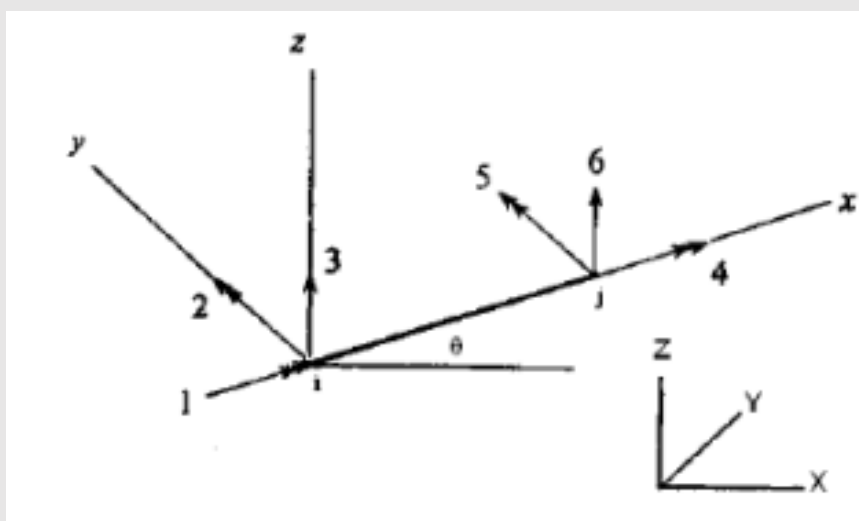
Fonte: Vrack, (s.d).

Analogia de Grelha

Atualmente existem alguns processos que permitem fazer os estudos da estrutura na forma tridimensional, dentre eles está o processo da analogia de grelha. Neste processo existe a divisão das lajes que compõem um pavimento em um número determinado de barras, onde as rigidezes à torção e à flexão da laje são concentradas nessas barras. Esse processo permite reproduzir um comportamento estrutural bastante aproximado da realidade, podendo-se variar a geometria e as situações do arranjo estrutural (Col Debella, 2015).

Nesse sentido é válido salientar que o nó de uma grelha possui 3 graus de liberdade e o elemento de grelha, que é uma barra compreendida entre 2 nós, possui 6 graus de liberdade. De modo que, cada barra de grelha possui um sistema de eixos cartesianos ortogonais próprio, conhecidos como eixos de coordenadas locais. No sistema local, considera-se grau de liberdade de um elemento estrutural a soma da quantidade de movimentações que cada apoio pode ter, (Col Debella, 2015). De acordo com a Figura 3, tem-se: Momento fletor (em torno do eixo 2); Momento torsor (em torno do eixo 1); Esforço cortante (paralelo ao eixo 3).

Figura 3: Elemento de grelha e graus de liberdade.



Fonte: (Col Debella, 2015)

Métodos Computacionais

Os métodos computacionais desempenham um papel crucial no MEF. Desde o final da década de 1980, técnicas de programação orientada a objetos têm sido exploradas por pesquisadores para resolver problemas de análise estrutural utilizando o método dos elementos finitos. Essas técnicas possibilitam a solução de problemas complexos em um período significativamente menor do que seria necessário se fosse usado apenas um único processador.

De tal modo que, atualmente existem inúmeros softwares que conseguem utilizar-se da ideia do Método dos Elementos Finitos, para encontrar soluções nas estruturas de maneira mais aproximada. Dentre os tais, tem-se o SAP 2000 (versão 2022), que é um software destinado a análise de estruturas, através da modelagem destas, em que é possível obter através dos sistemas de coordenadas e as propriedades da geometria analisada, os esforços e deslocamentos, das mais diversas estruturas como, por exemplo, lajes, estruturas metálicas, pontes, prédios, barragens.

Nesse viés o escrito tem como premissa, encontrar os resultados de deslocamentos de uma laje com quatro apoios, por meio de um código de programação em linguagem Python por meio do Visual Code, e que serão inseridas as informações da laje na entrada

de dados, vale ressaltar que, para o MEF tem por objetivo dividir uma geometria em finitas partes, ou seja, criar uma malha, composta por elementos que nada mais é que a interligação entre dois nós, assim, na entrada de dados do código serão inseridas as respectivas coordenadas dos nós que formam a malha, além de características como o número de elementos, o número de nós, o número de nós carregados e as coordenadas dos nós dos elementos. Assim, serão comparados os valores dos deslocamentos encontrados entre o código e o SAP 2000 (versão 2022).

Metodologia

Da Geometria da Laje

A Laje escolhida para o refinamento deste trabalho é uma laje retangular de área 2,1x1x0 nas coordenadas X, Y, Z respectivamente. Referente as propriedades da laje que será utilizada, ela possui módulo de elasticidade igual a $E = 21287367 \text{ kN/m}^2$ (calculado a partir da equação da norma brasileira de concreto armado) e o módulo de elasticidade transversal $G = 8869736 \text{ N/m}^2$ (foi encontrado a partir das equações clássicas de resistência dos materiais), resalta-se que essas propriedades têm como base uma laje de $h = 0,12\text{m}$ e $b = 1\text{m}$, considerando um concreto com $f_{ck} = 20 \text{ MPa}$. Também foi definido que $\alpha = 0,0018$, e a inércias em x e inercia y é, respectivamente, $0,01\text{m}^3$ e $0,000144 \text{ m}^3$. Nesse sentido, é importante ressaltar que essa laje, possuirá uma carga pontual negativa, no seu centro, na direção z igual a -100 kN . Além dessas características, a Laje possuirá 4 apoios.

Para a comparação foi adotada o nó 5 de todas as malhas, sendo o mesmo nó nos dois programas. Assim, foi possível determinar a diferença e o erro relativo entre eles.

Da analogia de Grelha

O presente trabalho será concebido levando-se em consideração a analogia de grelha, nesse sentido a medida em que a laje será refinada o número de elementos de grelha se aumentará. É válido salientar que o elemento de grelha é formado a partir da união das coordenadas de dois nós. Nesse sentido, segue o exemplo na Figura 4, do

elemento de grelha formado pelo nó 1 e 2 do primeiro refinamento laje com 12 nós. De modo que os nós estão representados na cor preta, e os apoios, que também são nós, mas com restrição de rotação no eixo z, estão na cor branca.

É importante salientar, que o elemento de grelha é constituído por dois nós, como dito anteriormente, cada nó possui um sistema de coordenadas X e Y, por exemplo, o elemento 1 da malha de 9 nós, é formado pelos nós 1 e 2. Deste modo, o nó 1 possui a coordenada [0.0,0.0] e o nó 2 possui a coordenada [1.05, 0.0].

Figura 4: Elemento de grelha

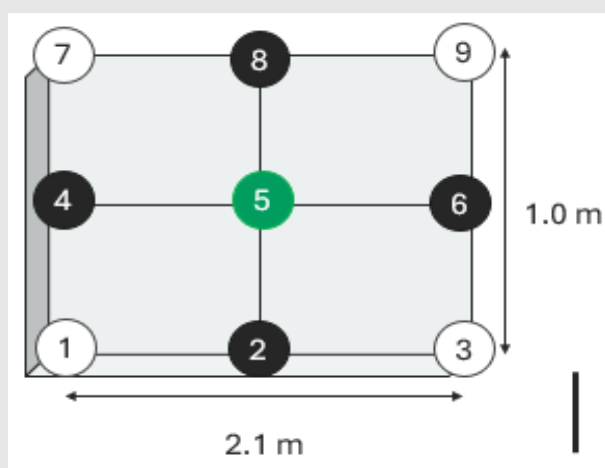


Fonte: do Autor (2024).

Grelha formada por 9 nós

A primeira geometria de laje a ser estudada, utilizando a analogia de grelha, está formada por 9 nós que juntos formam 12 elementos finitos de grelha, representada na Figura 5.

Figura 5: Grelha com 9 nós



Fonte: Do autor, (2024).

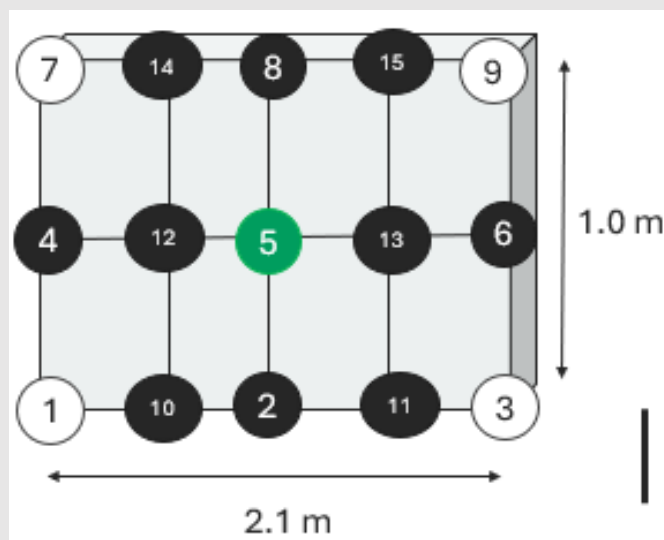
Inicialmente, será feito a entrada de dados no código das propriedades citadas anteriormente. Posterior a isso, serão implementadas as entradas de dados da grelha por meio de coordenadas inseridas no código na linguagem python, por meio do Visual Code um programa de inserção de códigos em diferentes linguagens de programação.

A grelha formada por 9 nós possuirá as seguintes coordenadas, para x,y. ([nó 1 [0.0, 0.0], nó 2 [1.05, 0.0], nó 3 [2.10, 0.0], nó 4 [0.0, 0.50], nó 5 [1.05, 0.50], nó 6 [2.10, 0.50], nó 7 [0.0, 1.00], nó 8 [1.05, 1.00], nó 9 [2.10, 1.00]]).

Grelha formada por 15 nós

De modo semelhante a grelha de 12 nós, será feito o mesmo para a de 15 nós o que divergirá será nesta a malha será refinada outra vez e possuirá 22 elementos finitos de grelha.

Figura 6: Grelha com 15 nós



Fonte: Do autor, (2024).

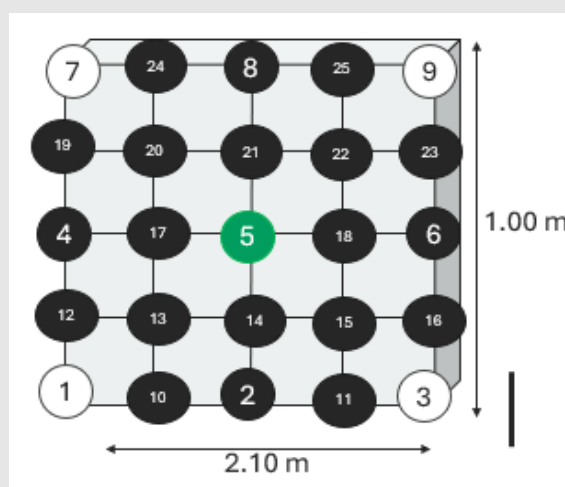
Os nós terão as seguintes coordenadas, Figura 6, (nó 1 [0.0, 0.0], nó 2 [1.05, 0.0], nó 3 [2.10, 0.0], nó 4 [0.0, 0.50], nó 5 [1.05, 0.50], nó 6 [2.10, 0.50], nó 7 [0.0, 1.00], nó 8 [1.05, 1.00], nó 9 [2.10, 1.00], nó 10 [0.525, 0.00], nó 11 [1.575, 0.00], nó 12 [0.525, 0.50], nó 13 [1.575, 0.50], nó 14 [0.252, 1.00], nó 15 [1.575, 1.00]). A linguagem Python entende o símbolo de ponto com vírgula, e por este motivo o leitor deve compreender que o número 1.05 é equivalente em português a 1,05.

Grelha formada por 25 nós

A grelha com 25 nós, Figura 7, formarão 44 elementos de grelha. E terão as seguintes coordenadas (nó 1 [0.00, 0.00], nó 2 [1.05, 0.00], nó 3 [2.10, 0.00], nó 4 [0.00,

0.50], nó 5 [1.05, 0.50], nó 6 [2.10, 0.50], nó 7 [0.00, 1.00], nó 8 [1.05, 1.00], nó 9 [2.10, 1.00], nó 10 [0.525, 0.00], nó 11 [1.575, 0.00], nó 12 [0.00, 0.25], nó 13 [0.525, 0.25], nó 14 [1.05, 0.25], nó 15 [1.575, 0.25], nó 16 [2.10, 0.25], nó 17 [0.525, 0.5], nó 18 [1.575, 0.5], nó 19 [0.00, 0.75], nó 20 [0.525, 0.75], nó 21 [1.05, 0.75], nó 22 [1.575, 0.75], nó 23 [2.10, 0.75], nó 24 [0.525, 1.00], nó 25 [1.575, 1.00]).

Figura 7: Grelha com 12 nós



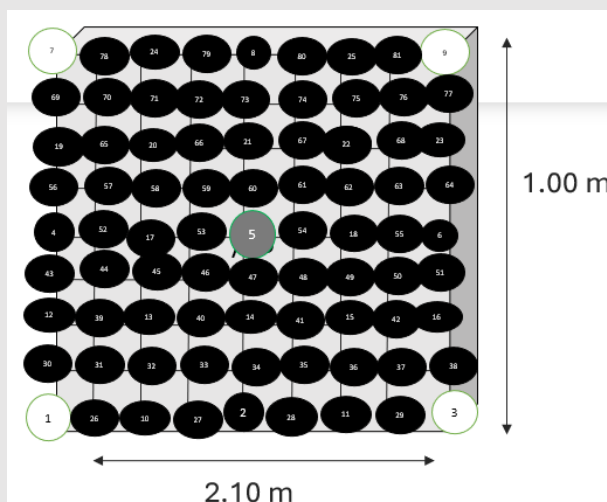
Fonte: Do autor (2024).

Grelha formada por 81 nós

Para a grelha 81 nós, Figura 8, formarão 156 elementos e possuirá as seguintes coordenadas, (nó 1 [0.00, 0.00], nó 2 [1.05, 0.00], nó 3 [2.10, 0.00], nó 4 [0.00, 0.50], nó 5 [1.05, 0.50], nó 6 [2.10, 0.50], nó 7 [0.00, 1.00], nó 8 [1.05, 1.00], nó 9 [2.10, 1.00], nó 10 [0.525, 0.00], nó 11 [1.575, 0.00], nó 12 [0.00, 0.25], nó 13 [0.525, 0.25], nó 14 [1.05, 0.25], nó 15 [1.575, 0.25], nó 16 [2.10, 0.25], nó 17 [0.525, 0.5], nó 18 [1.575, 0.5], nó 19 [0.00, 0.75], nó 20 [0.525, 0.75], nó 21 [1.05, 0.75], nó 22 [1.575, 0.75], nó 23 [2.10, 0.75], nó 24 [0.525, 1.00], nó 25 [1.575, 1.00] nó 26 [0.2625, 0.00], nó 27 [0.7875, 0.00], nó 28 [1.3125, 0.00], nó 29 [1.8375, 0.00], nó 30 [0.0, 0.125], nó 31 [0.2625, 0.125], nó 32 [0.525, 0.125], nó 33 [0.7875, 0.125], nó 34 [1.05, 0.125], nó 35 [1.3125, 0.125], nó 36 [1.575, 0.125], nó 37 [1.8375, 0.125], nó 38 [2.10, 0.125], nó 39 [0.2625, 0.25], nó 40 [0.7875, 0.25], nó 41 [1.3125, 0.25], nó 42 [1.8375, 0.25], nó 43 [0.00, 0.375], nó 44 [0.2625, 0.375], nó 45 [0.525, 0.375], nó 46 [0.7875, 0.375], nó 47 [1.05,

0.375], nó 48 [1.3125, 0.375], nó 49 [1.575, 0.375], nó 50 [1.8375, 0.375], nó 51 [2.10, 0.375], nó 52 [0.2625, 0.50], nó 53 [0.7875, 0.50], nó 54 [1.3125, 0.50], nó 55 [1.8375, 0.50], nó 56 [0.00, 0.625], nó 57 [0.2625, 0.625], nó 58 [0.525, 0.625], nó 59 [0.7875, 0.625], nó 60 [1.05, 0.625], nó 61 [1.3125, 0.625], nó 62 [1.575, 0.625], nó 63 [1.8375, 0.625], nó 64 [2.10, 0.625], nó 65 [0.2625, 0.75], nó 66 [0.7875, 0.75], nó 67 [1.3125, 0.75], nó 68 [1.8375, 0.75], nó 69 [0.0, 0.875], nó 70 [0.2625, 0.875], nó 71 [0.525, 0.875], nó 72 [0.7875, 0.875], nó 73 [1.05, 0.875], nó 74 [1.3125, 0.875], nó 75 [1.575, 0.875], nó 76 [1.8375, 0.875], nó 77 [2.10, 0.875], nó 78 [0.2625, 1.0], nó 79 [0.7875, 1.0], nó 80 [1.3125, 1.0], nó 81 [1.8375, 1.0]).

Figura 8: Grelha com 12 nós

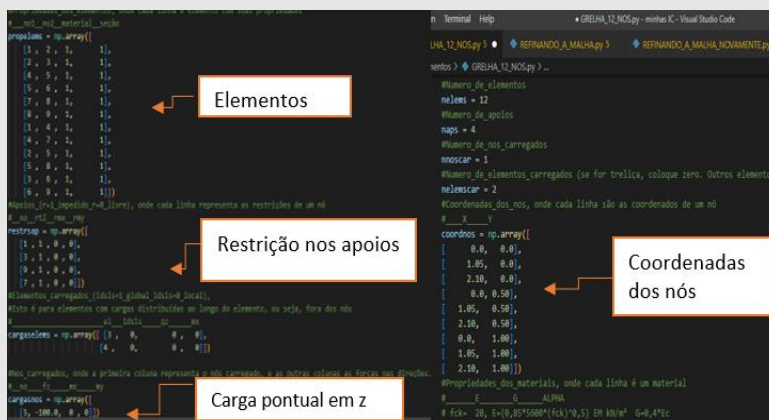


Fonte: Do autor, (2024).

Do programa a ser utilizado

O programa a ser utilizado, terá como objetivo principal, mensurar os deslocamentos que ocorrem na estrutura de acordo com uma carga aplicada de -100 kN, será um código em linguagem Python utilizando o software o Visual Code, nesse viés o programa apresentará a seguinte estrutura para entrada de dados, que será substituída de acordo com cada refinamento como se mostra para a grelha de 12 nós, na Figura 9.

Figura 9: Entrada de dados dos elementos e coordenadas dos nós (da Grelha 12 nós).



The image shows a Python script in Visual Studio Code with several annotations pointing to specific parts of the code:

- Elementos**: Points to a list of element IDs: `propriedades = np.array([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12])`.
- Restrição nos apoios**: Points to a list of support restrictions: `restrecoes = np.array([1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0])`.
- Coordenadas dos nós**: Points to a list of node coordinates: `coordenadas = np.array([[0.0, 0.0], [1.05, 0.0], [2.10, 0.0], [0.0, 0.50], [1.05, 0.50], [2.10, 0.50], [0.0, 1.00], [1.05, 1.00], [2.10, 1.00]])`.
- Carga pontual em z**: Points to a list of point loads: `cargas = np.array([0, 0, 0, 0, -100, 0, 0, 0, 0])`.

Fonte: Do autor.

Nesta entrada de dados, é necessário inserir a quantidade de elementos que depende do refinamento da malha. Assim cada elemento é colocado no código, com base em dois nós, e para esses nós é atribuído coordenadas de acordo com sua posição no plano x e y.

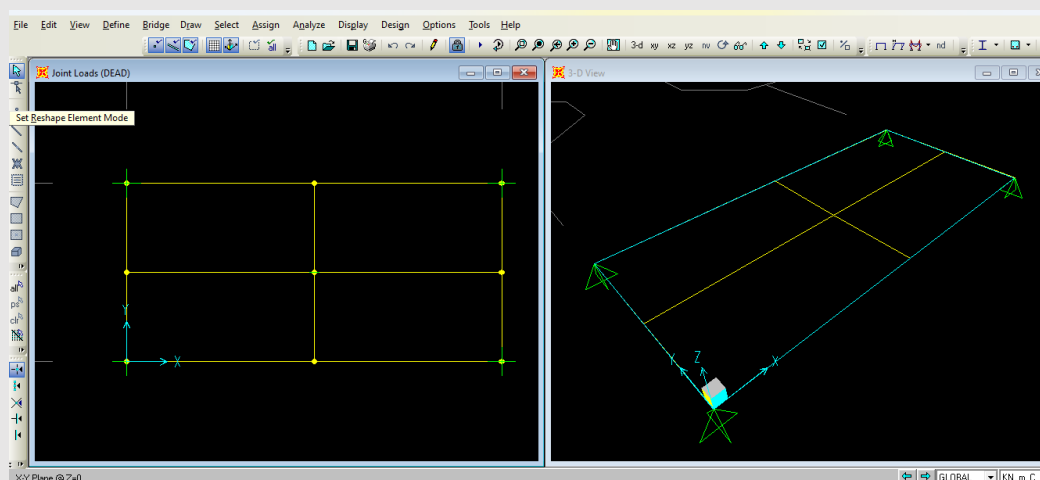
É importante ressaltar que uma laje possui apoios, e nesses apoios há restrição de rotação em x e y e deslocamento z, e no código são representados por alguns nós, sendo no modelo utilizado, os nós 1,3,7 e 9.

A carga aplicada de -100 kN, será aplicada no nó 5, e essa condição deve também ser informada na entrada de dados, nó código.

Outrora, para validação dos resultados encontrados no código do Python é utilizado o SAP 2000 (versão 2022) para gerar cada uma das grelhas refinadas e assim verificar o erro em relação a ambos e avaliar a convergência de resultados.

Também, deve-se informar ao programa as coordenadas dos nós para formar os elementos, e o nó que terá a força de 100 kN, o painel principal do SAP 2000 (versão 2022) está apresentado na Figura 10.

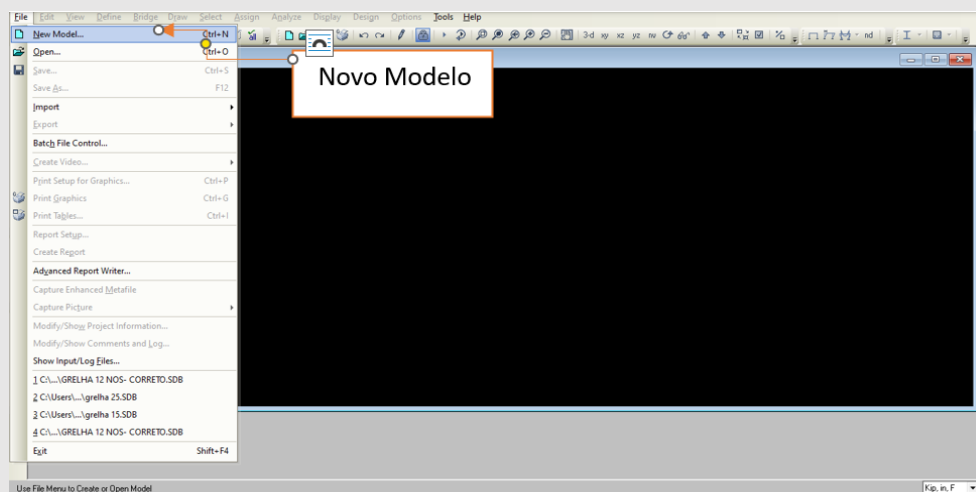
Figura 10: Representação do painel principal do SAP 2000 com a malha criada



Fonte: Do autor, (2024).

Para se construir uma grelha como mostrado na Figura 11, faz-se necessário lançar os dados da grelha como explicitado adiante.

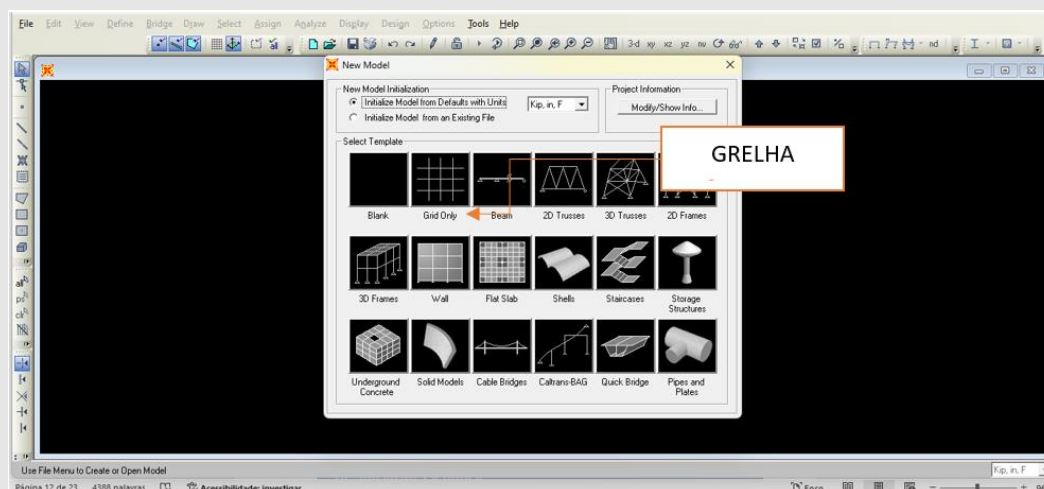
Figura 11: Representação do painel principal do SAP 2000 (versão 2022).



Fonte: Do autor, (2024).

Para inserir uma nova geometria no programa basta ir em novo modelo (Figura 12) e selecionar o tipo de estrutura que irá se estudar. Nesse caso, analisaremos a laje por meio da analogia de grelha em que se dividirá a laje em finitas partes ou elementos.

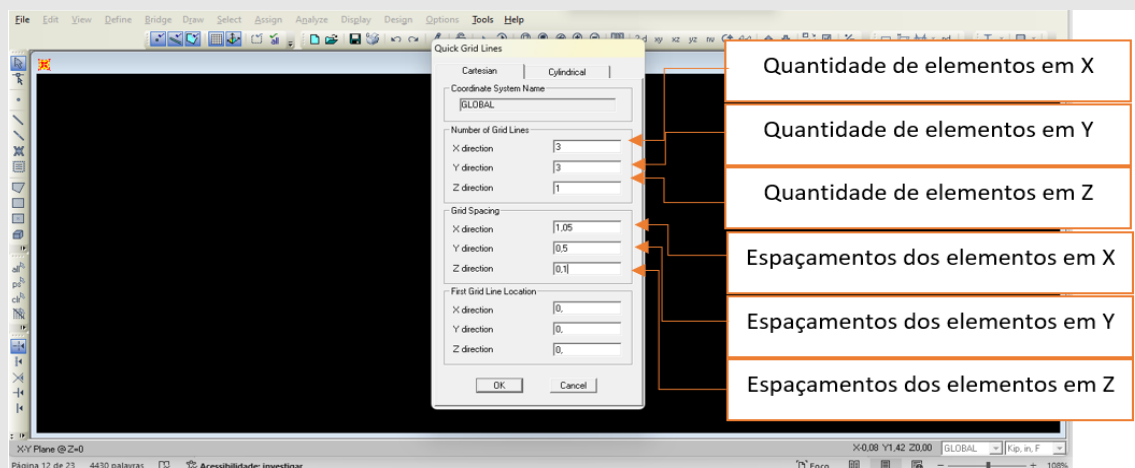
Figura 12: Tipo de modelo no SAP 2000 (versão 2022)



Fonte: Do Autor (2024).

Em seguida, é necessário inserir no SAP 2000 (versão 2022) a quantidade de elementos nas direções X,Y,Z, deste modo, como o espaçamento entre os elementos com mostra a Figura 13, para a malha da grelha de 12 nós, e assim será feito para todos os refinamentos.

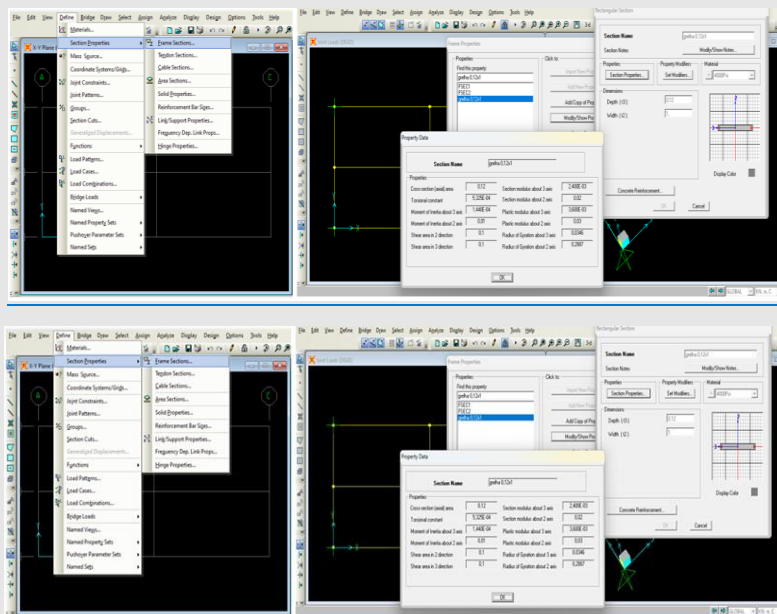
Figura 13: Quantidade de elementos e espaçamento.



Fonte: Do Autor (2024).

Posteriormente, se define a seção transversal da grelha, no programa lança-se apenas uma seção transversal, quanto para viga tanto para laje, como mostra a Figura 13 e 14.

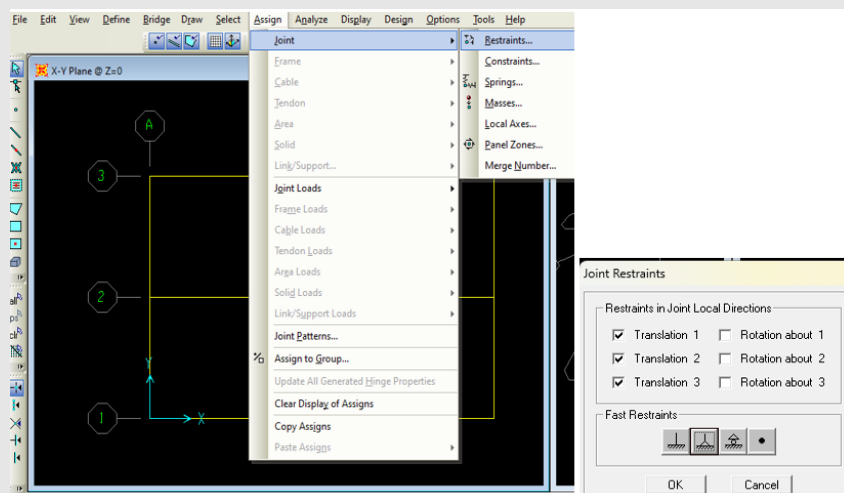
Figura 14: Propriedade da seção transversal.



Fonte: Do Autor (2024).

No programa também é possível incluir os apoios na malha criada, para restringir os movimentos de translação nas 3 direções (Figura 15).

Figura 15: Restrições nos apoios.



Fonte: Do Autor, (2024).

Resultados e discussão

Inicialmente é importante fazer a interpretação dos valores obtidos ao rodar o código, de modo que o resultado de deslocamento nodais é fornecido em trio de valores,

Revista Mirante, Anápolis (GO), v. 17, n. 2, p. 48-71, dez. 2024. ISSN 1981-4089
e que o valor de análise é o obtido pelo nó 5, que é onde a força concentrada foi aplicada, como mostra a Figura 16.

Figura 16: Deslocamentos nodais obtidos no Visual code da grelha de 9 nós.

```
[ [ 0.0000000e+00]
  [-6.72426037e-04]
  [ 2.99634544e-03]
  [-2.07079933e-03]
  [-6.94046291e-04]
  [ 2.59578639e-19]
  [ 0.0000000e+00]
  [-6.72426037e-04]
  [-2.99634544e-03]
  [-1.99317171e-04]
  [ 2.64795415e-20]
  [ 2.99885092e-03]
  [-2.35179777e-03]
  [ 3.98932739e-20]
  [ 2.49419172e-19]
  [-1.99317171e-04]
  [ 3.71701597e-20]
  [-2.99885092e-03]
  [ 0.0000000e+00]
  [ 6.72426037e-04]
  [ 2.99634544e-03]
  [-2.07079933e-03]
  [ 1.87803412e-19]
  [ 0.0000000e+00]
  [ 6.72426037e-04]
  [-2.99634544e-03]]
PS C:\Users\RAQUEL\O
```

Fonte: Do autor.

Desse modo, a cada três valores na saída de dados, corresponde ao deslocamento devido em z e as rotações em x e y respectivamente do nó. Como o valor a ser analisado será o nó 5, conta-se cinco vezes em grupo de 3 valores, e encontra-se o valor do deslocamento em z, que é o primeiro. A Figura 17, mostra os valores na saída de dados para a grelha de 9 nós, em que é possível verificar os valores de deslocamentos para os nós, de três em três valores.

É importante observar que por exemplo, nos nós em que há apoios (1,3,7,9), e há restrição em z, o valor do deslocamento em z é zero, o que mostra que o valor gerado corresponde às condições impostas na entrada de dados.

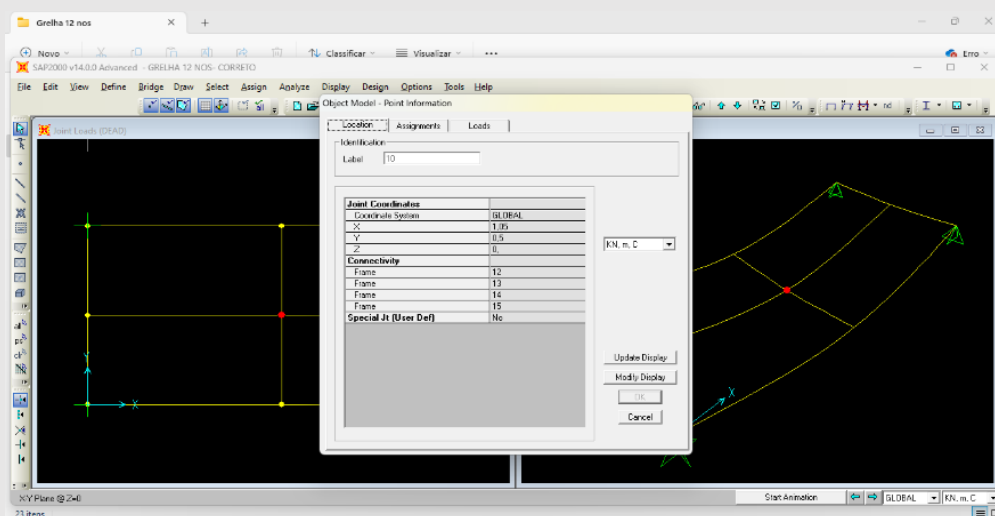
Figura 17: Deslocamentos nodais obtidos no Visual Code (da grelha de 9 nós).

[0.0000000e+00]	Deslocamento nó 1.
[-6.72426037e-04]	Deslocamento nó 2.
[2.99634544e-03]	Deslocamento nó 3.
[-2.07079933e-03]	Deslocamento nó 4.
[-6.94046291e-04]	Deslocamento nó 5.
[2.59578639e-19]	Deslocamento nó 6.
[0.0000000e+00]	Deslocamento nó 7.
[-6.72426037e-04]	Deslocamento nó 8.
[-2.99634544e-03]	Deslocamento nó 9.
[-1.99317171e-04]	
[2.64795415e-20]	
[2.99885092e-03]	
[-2.35179777e-03]	
[3.98932739e-20]	
[2.49418172e-19]	
[-1.99317171e-04]	
[3.71701597e-20]	
[-2.99885092e-03]	
[0.0000000e+00]	
[6.72426037e-04]	
[2.99634544e-03]	
[-2.07079933e-03]	
[1.87803412e-19]	
[0.0000000e+00]	
[6.72426037e-04]	
[-2.99634544e-03]	

Fonte: Do autor.

No SAP 2000, ao adaptar a grelha, as propriedades da grelha permitiram obter os resultados. Na Figura 18, está representada a malha de 9 nós.

Figura 18: Malha da grelha no SAP2000 (grelha de 9 nós).



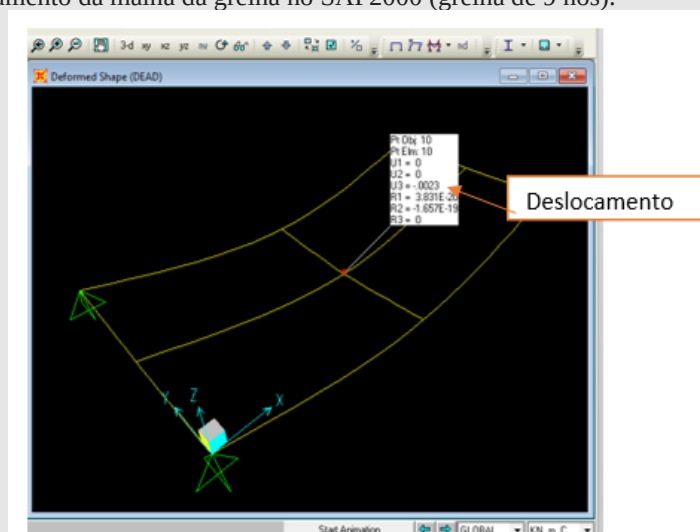
Fonte: Do autor.

Nas figuras a seguir, podem-se verificar os resultados obtidos do deslocamento pelo código e pelo SAP 2000 para grelha de 9 nós, 15 nós, 25 nós e 81 nós.

Grelha 9 nós

Para a malha de 9 nós, foi obtido um valor do deslocamento igual a 0,0023 m (Figura 19). Os deslocamentos obtidos pelo código estão apresentados na Figura 17.

Figura 19: Deslocamento da malha da grelha no SAP2000 (grelha de 9 nós).

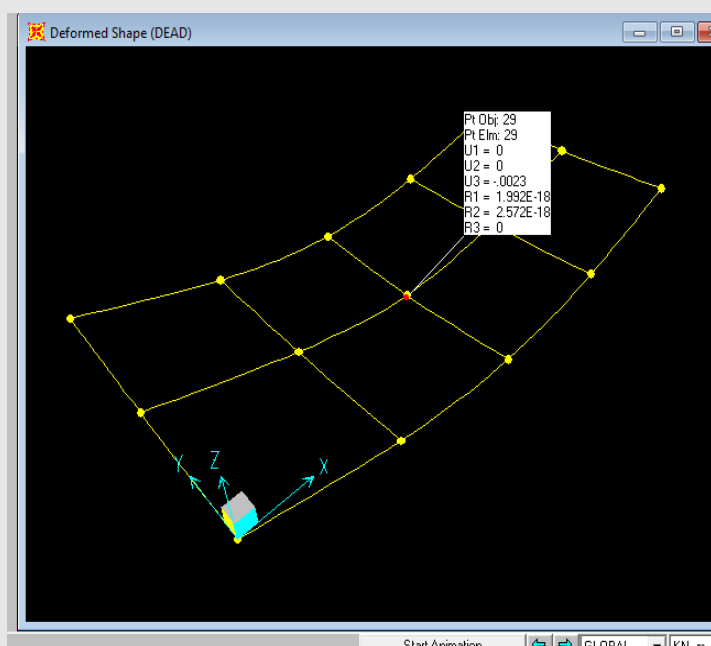


Fonte: Do autor.

Grelha 15 nós

Na malha formada para a grelha de 15 nós o valor do deslocamento obtido foi de 0,0023 (Figura 21), não tendo alteração com relação ao refinamento anterior.

Figura 20: Deslocamento da malha da grelha no SAP 2000 (grelha de 15 nós).



Fonte: Do autor.

Figura 21 Deslocamento da malha da grelha no Visual Code (grelha de 15 nós).

```
[ 0.0000000e+00]
[-6.72426037e-04]
[ 2.99634544e-03]
[-2.07079933e-03]
[-6.94046291e-04]
[ 2.59578639e-19]
[ 0.0000000e+00]
[-6.72426037e-04]
[-2.99634544e-03]
[-1.99317171e-04]
[ 2.64795415e-20]
[ 2.99885092e-03]
[-2.35179777e-03]
[ 3.98932739e-20]
[ 2.49419172e-19]
[-1.99317171e-04]
[ 3.71701597e-20]
[-2.99885092e-03]
[ 0.0000000e+00]
[ 6.72426037e-04]
[ 2.99634544e-03]
[-2.07079933e-03]
[ 1.87803412e-19]
[ 0.0000000e+00]
[ 6.72426037e-04]
[-2.99634544e-03]]
```

Fonte: Do autor.

Na Figura 21 está representado a saída de dados no Visual Code na linguagem Python para a malha da grelha de 15 nós.

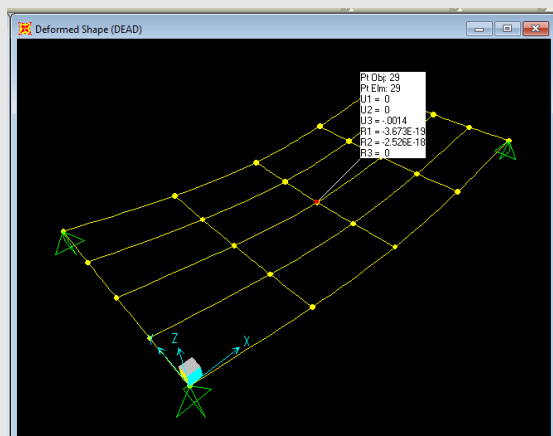
Para esse refinamento o resultado obtido com relação a malha de 9 nós, observou-se que não houve grandes variações nos valores encontrados de deslocamento, para a malha de 15 nós. Isso se deve ao fato de que o refinamento não foi tão considerável, para que esse valor se modificasse de maneira significativa.

Assim, a malha foi refinada com o aumento do número de nós, na expectativa de reduzir os erros entre o modelo numérico e o analítico.

Grelha 25 nós

Para a grelha com 25 nós, o deslocamento obtido no Visual Code, com relação ao anterior (malha de 15 nós) apresentando um valor ainda menor, de 0,001406, e para o SAP 2000 de 0,014, Figuras 22 e 23.

Figura 22: Deslocamento da malha da grelha no SAP 2000 (grelha de 25 nós).



Fonte: Do autor.

Figura 23: Deslocamento da malha da grelha no Visual Code (da grelha de 25 nós).

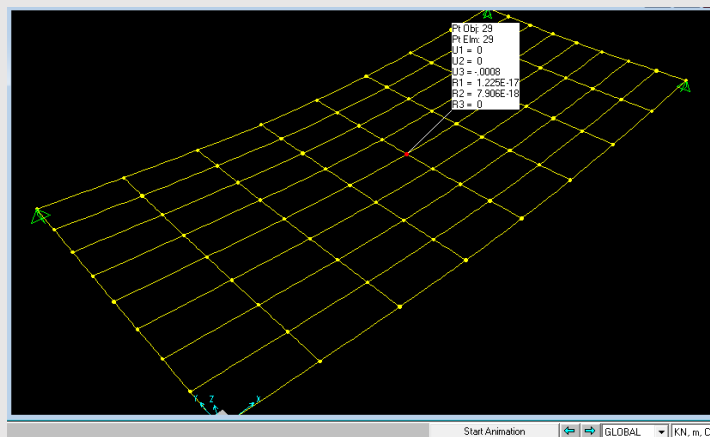
```
[[ 0.00000000e+00] [-4.06138611e-04]
[-4.08942223e-04] [ 1.34895737e-03]
[ 1.79872735e-03] [-8.68703777e-04]
[-1.25445332e-03] [-4.06138611e-04]
[-4.08736697e-04] [-1.34895737e-03]
[-2.40131106e-18] [-9.50413712e-05]
[ 0.00000000e+00] [-3.03297008e-04]
[-4.08942223e-04] [ 1.79811812e-03]
[-1.79872735e-03] [-9.58605075e-04]
[-1.34916058e-04] [-3.03752430e-04]
[-3.01817588e-19] [ 1.34880295e-03]
[ 1.79785085e-03] [-1.35181552e-03]
[-1.40654038e-03] [-3.15074897e-04]
[ 1.70452014e-19] [-2.41961966e-18]
[-2.56056982e-18] [-9.58605075e-04]
[-1.34916058e-04] [-3.03752430e-04]
[ 7.54543970e-20] [-1.34880295e-03]
[-1.79785085e-03] [ 3.15074897e-04]
[ 0.00000000e+00] [-2.74067832e-18]
[ 4.08942223e-04] [-9.58605075e-04]
[ 1.79872735e-03] [ 3.03752430e-04]
[-1.25445332e-03] [-1.34880295e-03]
[ 4.08736697e-04] [-9.50413712e-05]
[-2.74067832e-18] [ 3.03297008e-04]
[ 0.00000000e+00] [-1.79811812e-03]
[ 4.08942223e-04] [-8.68703777e-04]
[-1.79872735e-03] [ 4.06138611e-04]
[-8.68703777e-04] [ 1.34895737e-03]
[-4.06138611e-04] [-8.68703777e-04]
[ 1.34895737e-03] [ 4.06138611e-04]
[-8.68703777e-04] [-1.34895737e-03]]
```

Fonte: Do autor.

Grelha 81 nós

Para finalizar o refinamento da laje, obteve-se os resultados da malha composta por 81 nós que com um grau de discretização maior apresentou o menor dentre os deslocamentos encontrados, Figuras 24 e 25.

Figura 24: Deslocamento da malha da grelha no SAP 2000 (grelha de 81 nós).



Fonte: Do autor.

Figura 25: Deslocamento da malha da grelha no Visual Code (grelha de 81 nós).

[-1.83013459e-04]	[-4.25766711e-05]	[-5.54670183e-04]	[8.03794709e-04]	[-1.37254959e-04]	[-7.40510317e-04]	[-3.38180860e-04]	[4.46633990e-04]
[1.06490340e-03]	[-1.33214726e-04]	[1.31826680e-04]	[-7.03365944e-04]	[3.53659657e-06]	[3.93430668e-05]	[7.93430668e-05]	[-7.66915211e-04]
[-7.44118264e-04]	[1.06411896e-03]	[-7.84782185e-04]	[-1.67393934e-04]	[-9.98733116e-04]	[4.56424947e-04]	[-1.00076262e-03]	[1.69351866e-04]
[-1.80478056e-04]	[-5.54059553e-04]	[4.56897320e-04]	[4.56897320e-04]	[-5.56584666e-05]	[-7.42359658e-04]	[-5.74161957e-05]	[2.22495198e-05]
[9.65233224e-06]	[-1.31948668e-04]	[-7.66352867e-04]	[-7.66352867e-04]	[-7.23287792e-05]	[1.83357573e-06]	[7.96933986e-05]	[2.04399732e-04]
[0.00000000e+00]	[1.39128307e-04]	[-1.69921265e-04]	[-1.69921265e-04]	[1.06386911e-03]	[-4.78000173e-04]	[1.06227433e-03]	[-7.04399732e-04]
[-1.87006823e-04]	[8.04289391e-04]	[-1.06257938e-03]	[1.04072880e-05]	[-3.28324348e-04]	[-3.35302011e-04]	[-3.14067683e-04]	[1.68647607e-04]
[-1.06397363e-03]	[-7.86363667e-04]	[-5.13950495e-04]	[-7.03007776e-04]	[-7.28404170e-05]	[1.67137425e-06]	[1.28981604e-04]	[-4.80560457e-04]
[-5.98538838e-05]	[-1.38631285e-04]	[1.75369703e-04]	[-1.70257490e-04]	[9.93231187e-04]	[-9.99532218e-04]	[9.93313040e-04]	[-5.35631166e-04]
[4.35189592e-06]	[1.18597517e-05]	[8.09755100e-04]	[-1.70257490e-04]	[-5.66975332e-04]	[-9.99532218e-04]	[9.93313040e-04]	[1.69323323e-04]
[1.06377685e-03]	[-5.54631268e-04]	[-5.13700726e-04]	[-4.71142460e-04]	[-7.40644303e-05]	[-5.47830443e-05]	[-7.22167037e-04]	[-7.86431469e-04]
[-8.08812755e-04]	[-1.36668520e-04]	[1.80019553e-04]	[-5.35358430e-04]	[8.05066955e-04]	[7.59313308e-05]	[1.29689711e-04]	[1.78851456e-04]
[2.16878436e-06]	[-7.91307381e-04]	[-7.87272023e-04]	[-1.71081584e-04]	[-7.35763460e-04]	[1.06368459e-03]	[4.52330671e-04]	[-2.97211240e-04]
[1.67791218e-05]	[-4.39308564e-05]	[-2.74487542e-04]	[-7.91928235e-04]	[-7.81414621e-05]	[-3.26983483e-04]	[-7.23284523e-04]	[-1.00272568e-03]
[-6.26404687e-05]	[-1.38736045e-04]	[-1.88865324e-04]	[-2.97428300e-04]	[4.57013193e-04]	[7.59267294e-05]	[1.32198644e-04]	[-2.32485907e-05]
[1.72283204e-06]	[-1.06289044e-03]	[9.95660837e-04]	[-1.73340993e-04]	[-8.01568995e-04]	[9.92801958e-04]	[-4.83358073e-04]	[1.74049011e-04]
[-1.06223262e-03]	[-5.71243050e-04]	[-1.79234577e-04]	[-9.99091108e-04]	[-8.44109170e-05]	[-5.66057872e-04]	[-3.16447504e-04]	[1.06311827e-03]
[0.00000000e+00]	[-5.97477982e-06]	[4.56781561e-04]	[-2.36400605e-05]	[1.39789243e-05]	[7.65183830e-05]	[1.37710625e-04]	[-2.74448861e-04]
[1.78505883e-04]	[8.06075992e-04]	[-6.81821601e-04]	[-1.76576611e-04]	[-7.37249274e-04]	[8.07233825e-04]	[-1.00261409e-03]	[1.76238674e-04]
[1.06476284e-03]	[-5.72960884e-04]	[-1.81321919e-04]	[-1.06348440e-03]	[-8.12931086e-05]	[-7.35288011e-04]	[-1.00261409e-03]	[-2.74448861e-04]
[-7.44820361e-04]	[1.66934717e-06]	[-4.70314566e-04]	[-3.15371867e-04]	[-4.75257307e-04]	[7.90929321e-05]	[-2.24527099e-05]	[1.76238674e-04]
[1.78040888e-04]	[-7.89152485e-04]	[-2.74042739e-04]	[-1.32228707e-04]	[-5.68130916e-04]	[4.54741849e-04]	[1.66223183e-04]	[9.94176395e-04]
[2.00213155e-05]	[-4.15734487e-05]	[-1.84572422e-04]	[9.94130250e-04]	[-7.88279680e-05]	[-8.01505045e-04]	[1.06433969e-03]	[-6.81917021e-04]
[0.00000000e+00]	[1.30621524e-04]	[-9.99391722e-04]	[-7.22346720e-04]	[-7.90437468e-04]	[8.43845261e-05]	[-2.95717102e-04]	[1.76691344e-04]
[1.83984701e-04]	[1.06389872e-03]	[-2.30123649e-05]	[-1.34449253e-04]	[-3.30506540e-04]	[2.03826265e-05]	[1.62776892e-04]	[4.47256421e-04]
[-1.06359002e-03]	[-5.53168484e-04]	[-1.71470637e-04]	[4.57042361e-04]	[-7.78724447e-05]	[-7.36973284e-04]	[9.93006168e-04]	[-6.82614052e-04]
[-5.13703185e-04]	[1.28571674e-04]	[1.06452380e-03]	[-7.23343717e-04]	[-9.98870596e-04]	[8.17604862e-05]	[-5.34955261e-04]	[1.78809340e-04]
[-1.79241240e-04]	[8.08558562e-04]	[-2.96434508e-04]	[-1.37539981e-04]	[-5.77919595e-05]	[-4.80378484e-04]	[1.60920903e-04]	[-4.79184000e-04]
[8.03570600e-04]	[-7.86761706e-04]	[-1.68606878e-04]	[-4.72831208e-04]	[-1.06244900e-03]	[-5.67867779e-04]	[8.10144710e-04]	[-2.75144039e-04]
[-5.13227787e-04]	[1.34084874e-04]	[9.95009918e-04]	[-3.16962153e-04]	[-3.32413677e-04]	[7.96112551e-05]	[-7.03606283e-04]	[1.81669850e-04]
[-1.82577018e-04]	[2.51919002e-05]	[-5.35351814e-04]	[-1.37254959e-04]	[9.67114773e-06]	[-7.87276857e-04]	[1.67718328e-04]	[-1.00299037e-03]
[-7.92295431e-04]	[-5.54670183e-04]	[-1.66656090e-04]	[-9.98733116e-04]	[9.92274177e-04]			

Fonte: Do autor.

Na Tabela 1 são mostrados na primeira coluna a malha utilizada, na segunda o resultado pelo código em Python e na terceira coluna são mostrados os resultados do SAP

200. De forma geral os deslocamentos das duas plataformas apresentaram valores próximos.

Em vias do exposto, pôde-se, com base no código utilizado e na validação da convergência no SAP2000, verificar o valor do deslocamento no nó 5, que ocorreu na malha de laje, a medida em foi refinada, desse modo, obteve-se os seguintes deslocamentos.

Tabela 1: Deslocamentos para o nó 5

MALHA	CÓDIGO PYTHON	SAP 2000
Malha 9 Nós	0,0023570	0,0023000
Malha 15 Nós	0,0022623	0,0023000
Malha 25 Nós	0,0014060	0,0014000
Malha 81 Nós	0,0008000	0,0008000

Fonte: Do autor (2024).

A Tabela 2 mostra o erro e o erro relativo entre o Python e o SAP 2000 a medida em que a malha foi refinada. É importante ressaltar que, o erro foi feito a partir da subtração dos resultados de deslocamento pelo código no Python e o do SAP 2000. Assim, o erro relativo é o resultado dessa subtração dividido pelo deslocamento do SAP 2000. Considerou-se satisfatório o resultado apresentado pelo Python em relação ao SAP 2000 com erros da ordem de 0,0000570 e erros relativos melhores que 3%, chegando a aproximadamente zero na malha com 81 nós.

Tabela 2: Erro relativo entre o SAP 2000 e o código em Python

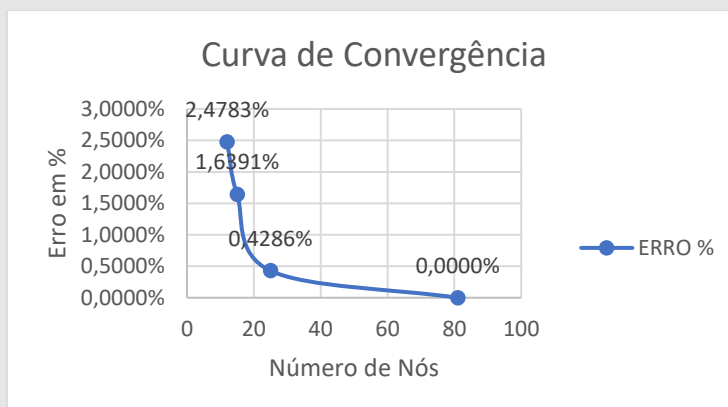
MALHA	DESLOCAMENTO SAP 2000	DESLOCAMENTO PYTHON	ERRO	ERRO RELATIVO
MALHA 9 NÓS	0,0023	0,0023570	0,0000570	2,4783%
MALHA 15 NÓS	0,0023	0,0022623	0,0000377	1,6391%
MALHA 25 NÓS	0,0014	0,0014060	0,0000060	0,4286%
MALHA 81 NÓS	0,0008	0,0008	0,0000000	0,0000%

Fonte: Do autor (2024).

Nesse sentido, foi observado que a medida que a laje era refinada os valores de deslocamento diminuía e chegando a valores com diferença mínima de um refinamento para outro, além disso ao fazer a análise de erro, ou seja, da diferença entre o código em Python e o SAP 2000 os valores foram convergindo até chegar próximo de zero.

O Gráfico 1 mostra de forma visível o resultado entre a malha (eixo x) e o erro relativo (eixo y), onde a medida que aumenta o número de nós o erro tende a zerar. Além disso, em termos de custo computacional uma malha com 9 elementos já apresenta um erro muito baixo da ordem de 2,47%, ou seja, esta malha já poderia ser utilizada para retirar os esforços internos de uma laje de concreto armado.

Gráfico 1: Curva de Convergência.



Fonte: NUNES R. A. et al., (2024)

Conclusão

Através da obtenção de resultados por meio do refinamento da malha da laje analisada, utilizando o método da discretização da estrutura, pelo método de analogia de grelha foi possível comparar o deslocamento do método numérico com o método analítico.

De modo que a medida em que a laje era refinada, o valor de deslocamento diminuía de forma gradual, tanto para os valores obtidos pelo código no Python, quanto para os valores obtidos pelo SAP 2000. O que indica que houve uma convergência de resultados, entre ambas as ferramentas.

A malha com 9 elementos já apresenta um erro muito baixo da ordem de 2,47%, ou seja, esta malha já poderia ser utilizada para retirar os esforços internos de uma laje de concreto armado

Nesse sentido, por meio da comparação de resultado de duas ferramentas diferentes, ou seja, o código em Python e o SAP 2000, se chegou a um mesmo resultado, o que torna esse valor de deslocamento, mais confiável. Em vias do exposto, os valores demonstraram, que as ferramentas utilizadas estão na calibragem correta e convergindo para os mesmos resultados.

Agradecimentos

Ao Instituto Federal Goiano de Ciências e Tecnologias- Campi Rio Verde - GO e Trindade e Universidade Estadual de Goiás – CCET Anápolis.

Referências

ALVES FILHO, A. **Elementos Finitos a base da Tecnologia CAE**. Saraiva Educação SA, 2018.

SCREMIN, A. **Apostila Método dos Elementos Finitos**, cap. 1, UFPR, 2016. Disponível em: <http://ftp.demec.ufpr.br/disciplinas/TM266/Apostila/Introdu%C3%A7%C3%A3o%20ao%20MEF.pdf>

BORGES, R. A.; DA SILVA, S. S.; BEZERRA, A. A. B. Estudo de treliças planas e espaciais utilizando a linguagem de programação Python e o software VTK. **Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia**, v. 2, n. 27, 2016.

CARNEIRO, C. C. S. Estudo do refinamento de malhas de elementos finitos com elemento finito q4-isoparamétrico linear, 2022.

COL DEBELLA, L. B. **Estudo da analogia de grelha no cálculo de lajes maciças de concreto armado**. 2015. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

FERREIRA, T. J. Análise numérica de sólidos axissimétricos via MEF: aplicação em elementos de concreto, de aço e mistos de aço e concreto, 2017.

FOGAÇA, I. A. Utilização de refinamento de malhas na simulação computacional aplicada ao problema da transferência de calor. 2015.

KASSIMALI, A. **Análise estrutural**. Cengage Learning, 2016.

MARTINEZ M. G., & Wrague M. M. (2023). **Método de analogia de grelha: análise numérica de lajes maciças de concreto armado**. *Revista Interdisciplinar De Pesquisa Em Engenharia*, 8(2), 43–51.

Revista Mirante, Anápolis (GO), v. 17, n. 2, p. 48-71, dez. 2024. ISSN 1981-4089

Fava, G. dos S. P. S., M. T., & Pádua S. M. (2020). Análise Numérica **Utilizando o Método das Grelhas e Elementos Finitos**. *Revista De Engenharia E Pesquisa Aplicada*, 6(1), 73-83.

NUNES, A.R. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano – Campus Rio Verde – GO, 2022. **Estudo do deslocamento de uma laje contínua utilizando o Método dos Elementos Finitos via analogia de grelha**.

LOTTI, R. S. et al. Aplicabilidade científica do método dos elementos finitos. **Revista Dental Press de Ortodontia e Ortopedia Facial**, v. 11, p. 35-43, 2006.