

ANÁLISE DOS ESFORÇOS SOLICITANTES DE ESTRUTURAS METÁLICAS COM BARRAS DE MOMENTO DE INÉRCIA VARIÁVEL

320

ANALYSIS OF DEMANDING EFFORTS ON METALLIC STRUCTURES WITH VARIABLE MOMENT OF INERTIA BARS

YAGO DE SOUZA BRITO

Graduado em Engenharia Civil pela Universidade Estadual de Goiás,
Campus Anápolis de Ciências Exatas e Tecnológicas
yagobrito1999@gmail.com

EDSON TEJERINA CALDERÓN

Doutor em Engenharia Civil e Professor da Universidade Estadual de Goiás,
Campus Anápolis de Ciências Exatas e Tecnológicas
edcal79@gmail.com

Resumo: O presente trabalho consiste no cálculo dos esforços solicitantes em vigas metálicas de seção I com mísulas. As mísulas são variações nas seções transversais das barras, geralmente presentes nas extremidades das vigas, como no caso de pontes e ligações de vigas com pilares, com o objetivo de aumentar a resistência das forças cortantes nesses pontos. O cálculo dos esforços e deslocamentos em vigas com mísulas é relativamente trabalhoso, mas pode ser contornado utilizando-se as tabelas desenvolvidas por Guldán (1956). Entretanto, essa metodologia pode apresentar algumas limitações e erros de aproximação. Neste trabalho é desenvolvido e aplicado o C.D.M, um aplicativo que permite calcular os esforços e deslocamentos utilizando oito modelos de vigas isostáticas e dezoito modelos de vigas hiperestáticas, permitindo correções imediatas em caso de erro e economizando tempo e esforço.

Palavras-chave: Mísulas; Momento inércia variável; Vigas com altura variável.

Abstract: The present work consists of calculating the stresses in section I metal beams with corbels. Corbels are variations in the cross-sections of bars, generally present at the ends of beams, as in the case of bridges and connections between beams and pillars, with the aim of increasing the resistance to shear forces at these points. The calculation of efforts and displacements in beams with corbels is relatively laborious, but can be overcome using the tables developed by Guldán (1956). However, this methodology may present some limitations and approximation errors. In this work, C.D.M is developed and applied, an application that allows the calculation of efforts and displacements using eight models of isostatic beams and eighteen models of hyperstatic beams, allowing immediate corrections in case of error and saving time and effort.

Keywords: Corbels; Variable moment of inertia; Beams with variable height.

Introdução

No dimensionamento de estruturas de engenharia civil, o conhecimento dos resultados das ações atuantes, é um dos elementos fundamentais para a realização de um bom dimensionamento. Pois o cálculo correto dos esforços solicitantes e dos deslocamentos da estrutura, garantem seu bom funcionamento. Os conceitos matemáticos desenvolvidos pela

engenharia estrutural, usa modelos teóricos e ensaios práticos, para definir e calcular os valores resultantes das solicitações de cálculo e traçar seus respectivos diagramas.

Antes de começar um dimensionamento, é necessário primeiro realizar a análise estrutural da estrutura. Um dos fatores de maior relevância para o cálculo dos esforços em uma estrutura, é o momento de inércia da seção transversal, sendo que a altura é diretamente responsável pela resistência das peças, especialmente quando se trata de esforços de flexão.

Os deslocamentos de uma estrutura, podem ser calculados através da energia de deformação, a qual é inversamente proporcional ao momento de inércia, ou seja, o aumento de uma, resulta diretamente na diminuição da outra. Para o cálculo dos esforços solicitantes é utilizado o método dos esforços, a fim de deduzir os coeficientes de Guldán (1956), os quais podem ser aplicados na resolução de estruturas pelo método dos deslocamentos.

Quando existe uma variação nas dimensões transversais de uma estrutura, especialmente na sua altura, ocorre uma variação do momento de inércia, desta forma, na energia de deformação também ocorre uma variação, pois agora passa de depender de uma variável que antes era constante, mas que agora também sofre mudanças, tornando o cálculo bem mais trabalhoso. Essa mudança do momento de inércia pode ocorrer das seguintes formas: em saltos e em mísulas. As variações em mísulas são utilizadas nesta pesquisa, onde é desenvolvido um aplicativo capaz de calcular os esforços solicitantes de alguns modelos de vigas de perfil I contendo mísulas.

Referencial teórico - idealização do comportamento de barras à flexão

De acordo com, Martha (2010), o comportamento de vigas submetidas à flexão foi formalizado no início do século XIX, por Navier. Nesse modelo matemático, ele estabeleceu um conjunto de diferenciais de equilíbrio e compatibilidade chamada de *Teoria de vigas de Navier*. Essa teoria possui como base, a consideração de quatro hipóteses básicas:

- 1) Os deslocamentos são pequenos em relação às dimensões da seção transversal;
- 2) Os deslocamentos gerados por cisalhamento são desprezados, pois o comprimento é bem maior em relação à altura;

3) As seções transversais continuam planas e normais ao eixo da barra, quando ela se deforma (hipótese de Bernoulli); e

4) O material tem comportamento elástico- linear (Lei de Hooke).

A partir dessas hipóteses é possível fundamentar um modelo estrutural, onde o deslocamento no interior da barra, gerado por algum carregamento externo, ocorre de forma linear. Ou seja, quando é considerada uma viga onde seu comprimento é bem maior em relação a sua altura, um carregamento externo resulta em um deslocamento contínuo. Isso ocorre porque o deslocamento final é resultado da somatória dos deslocamentos infinitesimais de cada trecho da barra que ocorrem como resultados de uma solicitação externa. Dessa forma, para o caso de pequenos deslocamentos, podem ser resumidos pela equação (1):

$$\frac{q(x)}{E.Iz(x)} = \frac{d^4v}{dx^4}$$

(1)

Então de acordo com Barros (2018), A equação (1), engloba todo o conjunto em um nível de elemento infinitesimal de barra que o modelo deve atender, sendo elas: condições de compatibilidade entre deslocamentos, rotações e deformações, lei constitutiva do material, condições de equilíbrio entre carregamento transversal distribuído, força cortante e momento fletor, e o momento de inércia.

Princípio dos trabalhos virtuais

Princípio dos trabalhos virtuais para corpos rígidos: para um corpo rígido em equilíbrio, a soma algébrica dos trabalhos virtuais resultante das forças aplicadas sobre o corpo é nula, e isso é válido para todos os deslocamentos virtuais que são impostos sobre ele (SÜSSEKIND, 1980).

$$W_{ext} = 0$$

(2)

Princípio dos trabalhos virtuais para corpos elásticos: em um corpo elástico, quando sua configuração de equilíbrio é atingida, o trabalho virtual total das forças externas atuantes

sobre ele, é igual ao trabalho virtual das forças internas também atuantes nele, para todos os deslocamentos virtuais arbitrários que lhe for imposto, compatíveis com os vínculos do corpo (SÜSSEKIND, 1980).

$$W_{ext} = W_{int}$$

(3)

O Princípio dos Trabalhos Virtuais - PTV pode ser aplicado no cálculo de deslocamentos em estruturas Isostáticas, considerando-se estas como corpos elásticos, neste caso:

$$W_{ext} = \bar{P} * \delta$$

(4)

$$W_{int} = \int_L \bar{M} * d\theta + \int_L \bar{N} * du + \int_L \bar{Q} * dv$$

(5)

Sendo:

$$du = \frac{Nds}{EA}$$

(6)

$$d\theta = \frac{Mds}{EI}$$

(7)

$$dv = \chi \frac{Qds}{GA}$$

(8)

Onde:

\bar{P} = Força virtual

δ = Deslocamento na direção da força virtual

N = Força normal provocado pela solitação externa;

E = Módulo de elasticidade longitudinal;

A = Área da seção transversal;

- M = Momento fletor provocado pela solicitação externa;
 I = Momento de inércia da seção transversal;
 ds = Comprimento infinitesimal ao longo do eixo da barra;
 Q = Força cortante provocado pela solicitação externa;
 G = Módulo de elasticidade transversal;
 χ = Fator de forma da seção transversal.

Método dos esforços

O método dos esforços tem como o principal objetivo resolver estruturas hiperestáticas. No método é adotado um sistema principal, que é uma estrutura isostática, obtida a partir da estrutura original hiperestática, retirando-se vínculos em número igual ao grau de hiperestaticidade g da estrutura. As reações de apoio atuantes nos vínculos retirados são substituídas pelas chamadas incógnitas hiperestáticas X_i que podem ser forças e/ou momentos. Considerando-se apenas os efeitos do momento fletor para o carregamento e para cada uma das incógnitas hiperestáticas, geralmente com valores unitários, serão obtidos $g+1$ sistemas com base no sistema principal. Com ajuda do princípio da sobreposição dos efeitos podem ser obtidos os esforços solicitantes da estrutura hiperestática e aplicando-se o teorema de Menabrea para cada uma das incógnitas, serão obtidas g equações com g incógnitas, cuja solução fornecerá os valores das incógnitas hiperestáticas, com os quais podem ser determinados os esforços solicitantes finais da estrutura hiperestática.

De acordo com Martha (2010), para que um sistema hiperestático seja resolvido pelo método dos esforços, ele deve satisfazer as seguintes considerações: I. Condições de equilíbrio; II. Condições sobre o comportamento dos materiais; e III. Condições de compatibilidade.

Método dos deslocamentos

Assim como no método anterior, o método dos deslocamentos é um método que permite resolver estruturas hipergeométricas. Para a aplicação do método, devem ser

considerados o comportamento dos materiais e as condições de compatibilidade estática da estrutura, tendo como sistema principal básico, um sistema isogeométrico, obtido a partir da aplicação das restrições de deslocamentos (linear ou angular) aos nós da estrutura original.

Integração numérica pela Quadratura de Gauss-Legendre

A Quadratura de Gauss-Legendre é um método de resolução de integrais de forma numérica, ele tem como objetivo fornecer resultados exatos para funções polinomiais até a ordem $(2n - 1)$, sendo n é o número de pontos aonde a função $F(x)$ será avaliada. Este método é mais vantajoso em relação aos métodos de Simpson e a dos Trapézios, normalmente utilizados, pois consegue atingir uma maior aproximação do valor real da integração das funções, isso acontece porque essa metodologia seleciona pontos de avaliação de maneira eficiente e não igualmente espaçados. A aplicação do método é realizada da seguinte forma:

Dada uma integral $I_N = \int_a^b F(x)dx$, de acordo com as formas de Newton-Cotes, é possível reescrever a função:

$$I_N = \int_a^b F(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} A_i * F(x_i)$$

(9)

O método de quadratura de Gauss considera o cálculo da integral em um intervalo de $[-1, 1]$, por esse motivo, é necessário realizar uma mudança da variável da função, fazendo com que os limites do intervalo $[a, b]$ da integral, tenham uma variação linear, isto é:

$$x = \frac{(b-a)*t}{2} + \frac{(b+a)}{2}$$

(10)

Consequentemente:

$$dx = \frac{(b-a)dt}{2}$$

(11)

Voltando a resolução do cálculo com os limites de integração adequados, então a equação (9), pode ser reescrita da seguinte forma:

$$I_N = \int_{-1}^1 F(t) dt = \sum_{i=0}^{n-1} A_i * F_i(t) \quad (12)$$

O próximo passo é utilizar o número de pontos adequados, em função da ordem do polinômio, para realizar o cálculo da integral de forma que ela fique mais próxima da exata.

Metodologia

• Aplicação do princípio dos trabalhos virtuais para corpos elásticos para um modelo genérico

O presente trabalho apresenta uma alternativa para calcular esforços solicitações internas, reações de apoio, coeficientes de Guldán (1956) e deslocamentos em barras variando em mísula, sendo o método utilizado a do Princípio dos Trabalhos Virtuais para corpos elásticos, que dispensa análises geométricas, e estabelece uma relação entre trabalho externo e energia interna armazenada durante a deformação da estrutura.

Aplicando-se o princípio dos trabalhos virtuais para cálculo de deslocamentos em estruturas isostáticas, devidos a carregamento externo, obtêm-se a seguinte expressão:

$$\bar{P} \cdot \delta = \int_L \bar{M} * \frac{M ds}{EI} + \int_L \bar{N} * \frac{N ds}{EA} + \int_L \bar{Q} * \frac{Q ds}{GA} \quad (13)$$

Considerando que neste estudo são analisadas barras submetidas a esforços de flexão e que devido a que a energia de deformação causada pelas solicitações das forças cortantes e normais é pequena, então pode-se reescrever a equação (13) de forma simplificada como:

$$\bar{P} * \delta = \int_L \bar{M} * \frac{M ds}{EI} \quad (14)$$

Ainda pode ser feita mais uma simplificação, sabendo que o módulo de elasticidade é um valor constante, então:

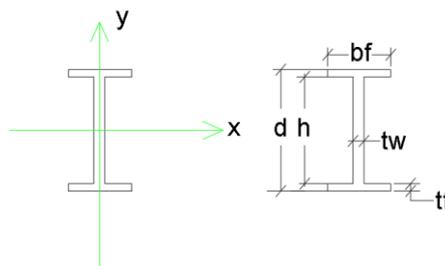
$$\bar{P} * \delta * E = \int_L \bar{M} * \frac{Mds}{I}$$

(15)

Lei da variação do momento de inércia

No presente trabalho, as seções transversais das vigas são perfis metálicos I com o momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo x , variando em mísulas. A variação da altura segue duas leis de variação, variação linear e variação parabólica (equação de 2º grau) (figura 1).

Figura 1- Representação das solicitações externas atuantes.



Fonte: Autores, 2023.

A equação para o cálculo da inércia da seção transversal do perfil I com relação ao eixo x , é dada por:

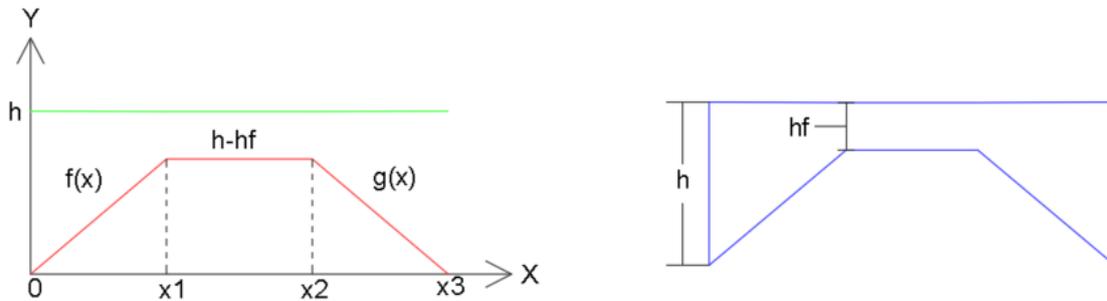
$$I = \frac{2*bf*tf^3}{12} + \frac{tw*h^3}{12} + 2 * \left(\frac{(h+tf)}{2}\right)^2 * tf * bf$$

(16)

Na equação (16), pode-se observar que a altura h é uma das variáveis mais importantes para o cálculo da inércia dessa seção transversal. Nos casos que são estudados, h varia ao longo do comprimento da barra, geralmente nas suas extremidades, e se mantém constante na parte central, como se mostra na figura 2. Seguindo as leis de variação já mencionadas, a mudança na altura dos perfis I, fica da seguinte forma:

- Altura variando de forma linear:

Figura 2 - Gráfico de função e figura com altura variante linearmente.



Fonte: Autores, 2023.

$$h(x) = \begin{cases} h - f(x) & \text{para } (0 \leq x \leq x_1) \\ h - (h - hf) & \text{para } (x_1 \leq x \leq x_2) \\ h + g(x) & \text{para } (x_2 \leq x \leq x_3) \end{cases} \quad (17)$$

Onde:

$$f(x) = \frac{(h-hf)}{(a)} x \quad (18)$$

$$g(x) = \frac{(h-hf)}{(a)} (x - (L - a)) \quad (19)$$

$$a = (x_1 - 0) = (x_3 - x_2) \quad (20)$$

$$L = x_3 \quad (21)$$

Como pode-se observar na equação (17), a altura da seção transversal da viga I, varia de acordo com as equações dadas em (18) e (19), onde:

$h(x)$: Altura da seção transversal no ponto xi da viga acima.

h : Altura inicial da seção transversal;

hf : Altura final da seção transversal;

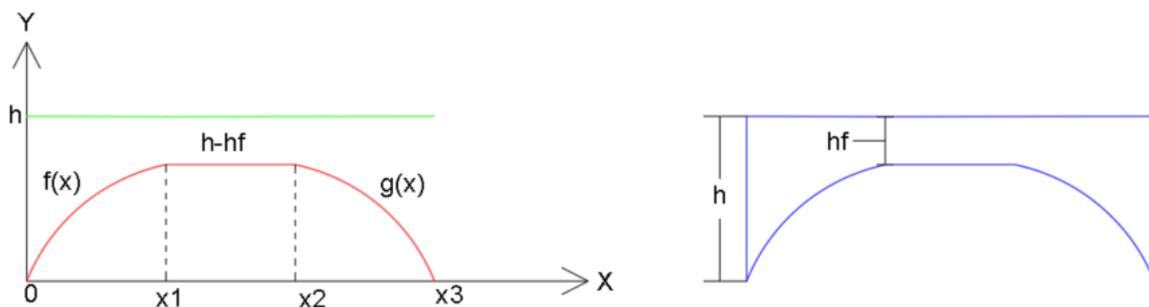
a : Comprimento da mísula;

L : Comprimento do intervalo com seção transversal de altura variável; e

x : Ponto de análise.

- Altura variando de forma parabólica (parábola de 2º grau):

Figura 3 - Gráfico de função parabólico e viga com altura variando como uma parábola.



Fonte: Autores, 2023.

$$h(x) = \begin{cases} h - f(x) & \text{para } (0 \leq x \leq x_1) \\ h - (h - hf) & \text{para } (x_1 \leq x \leq x_2) \\ h - g(x) & \text{para } (x_2 \leq x \leq x_3) \end{cases}$$

(22)

Onde:

$$f(x) = A * x^2 + B * x$$

(23)

$$g(x) = A * (x - (L - 2 * a))^2 + B * (x - (L - 2 * a))$$

(24)

$$a = (x_1 - 0) = (x_3 - x_2)$$

(25)

$$L = x^3$$

$$(26)$$

$$A = -\left(\frac{h-hf}{a^2}\right)$$

$$(27)$$

$$B = -(2 * A * a)$$

$$(28)$$

Como se pode observar na figura 3 acima, a variação de altura nesse caso acompanha a curva de uma equação de segundo grau que pode ser escrita de acordo com as equações (22), (23) e (24).

Logo pode-se concluir que a função para o cálculo do momento de inércia com a altura h variável é descrita na equação (29):

$$I(x) = \frac{2*bf*tf^3}{12} + \frac{tw*h(x)^3}{12} + 2 * \left(\frac{(h(x)+tf)}{2}\right)^2 * tf * bf$$

$$(29)$$

Cálculo dos esforços solicitantes e deslocamentos em vigas Isostáticas com mísula

Para realizar o cálculo dos esforços solicitantes, podem ser utilizadas as equações de equilíbrio, visto que se trata de um sistema isostático. Já para o cálculo do deslocamento, será utilizada a equação (29), onde I é substituído por $I(x)$. Dessa forma, é possível chegar à equação simplificada (30):

$$\bar{P}\delta E = \int_L \bar{M} * \frac{Mds}{\frac{2*bf*tf^3}{12} + \frac{tw*h(x)^3}{12} + 2*\left(\frac{(h(x)+tf)}{2}\right)^2 * tf * bf}$$

$$(30)$$

Cálculo dos esforços solicitantes em vigas hiperestáticas

Para calcular os esforços em vigas hiperestáticas, considerando-se diferentes tipos de mísulas e carregamentos, é aplicado o método dos esforços e calculados os coeficientes de

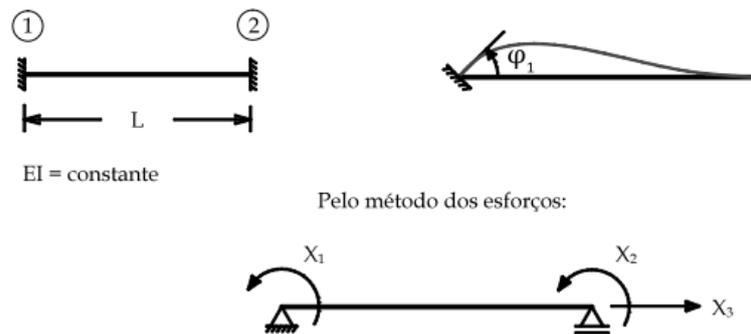
Guldan, que são constantes usadas para obter os momentos nas extremidades das barras. O primeiro passo é deduzir os coeficientes relacionados aos fatores de forma.

1. Cálculo dos coeficientes de Guldan, α_1 , α_2 e β

Utilizando o método dos esforços, são calculados os fatores de segunda espécie para vigas biengastadas.

Como é possível observar na figura 4, é aplicado um recalque de rotação unitário na extremidade 1 da viga biengastada, e X_1 , X_2 e X_3 , são as incógnitas hiperestáticas.

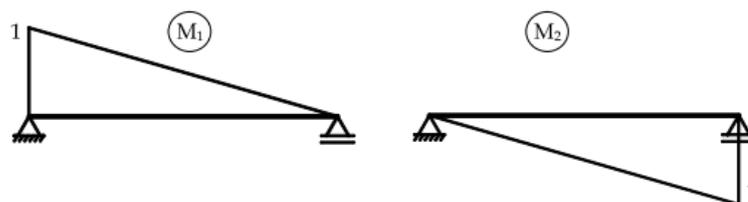
Figura 4 - Viga biengastada e sistema principal.



Fonte: Calderón, 2020.

Na figura 5, são mostrados os gráficos dos diagramas de momento fletor, onde M_1 é referente ao momento unitário X_1 , e M_2 a X_2 . Neste caso a ação atuante é o recalque de rotação unitário.

Figura 5 - Diagramas de momento fletor M_1 e M_2 .



Fonte: Calderón, 2020.

- Deslocamento \square_{11} , combinação do diagrama M_1 , com M_1 :

$$\delta_{11} = \int \frac{Ma(x) * Ma(x)}{E * I(x)} dx$$

(31)

Onde:

$$Ma(x) = -1 + \frac{x}{L}$$

(32)

$Ma(x)$: Equação do momento fletor para $X_1=1$;

- Deslocamento \square_{22} , combinação do diagrama M_2 , com M_2 :

$$\delta_{22} = \int \frac{Mb(x) * Mb(x)}{E * I(x)} dx$$

(33)

Onde:

$$Mb(x) = \frac{x}{L}$$

(34)

$Mb(x)$: Equação do momento fletor para $X_2=1$;

- Deslocamento $\square_{12} = \square_{21}$, combinação do diagrama M_1 , com M_2 :

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{Ma(x) * Mb(x)}{E * I(x)} dx$$

(35)

- Deslocamento \square_{10} , utilizando o método dos esforços aplicado ao caso de recalque dos apoios = -1

- Deslocamento δ_{20} , utilizando o método dos esforços aplicado ao caso de recalque dos apoios = 0

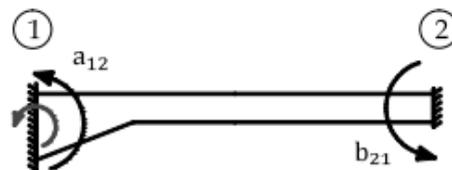
Resolvendo-se o sistema de equações formado com todos os deslocamentos já calculados, obtêm-se os valores de X_1 e X_2 :

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{Bmatrix}$$

(36)

Para um recalque unitário, os valores dos fatores de forma a_{12} e b_{21} representados na figura 6, são respectivamente X_1 e X_2 . Com eles é possível determinar os coeficientes de Guldan (1956), α_1 , α_2 e β tabelados.

Figura 6 - Mísula genérica.



Fonte: Calderón, 2020.

- Determinando o valor do coeficiente de Guldan α_1 :

$$a_{12} = \frac{a_1}{L'} * E * Ic$$

(37)

$$\alpha_1 = \frac{a_{12}}{E * Ic} * L'$$

(38)

Onde:

$$L' = \frac{I_c}{I_{min}} * L$$

(39)

- Determinando o valor do coeficiente de Guldan β :

$$b_{21} = \frac{\beta}{L'} * E * I_c$$

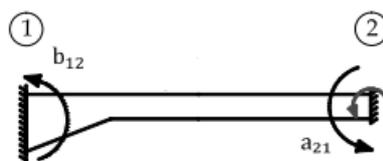
(40)

$$\beta = \frac{b_{21}}{E * I_c} * L'$$

(41)

Para determinar o coeficiente de Guldan (1956), α_2 é necessário realizar novamente o cálculo dos fatores de forma, aplicando o recalque de rotação unitário na extremidade 2, como mostra a figura 7. Essa nova análise fornece agora um deslocamento $\square_{10}=0$ e $\square_{20}= -1$, resultando em novos valores para X_1 e X_2 , onde: $X_1=b_{12}$ e $X_2=a_{21}$.

Figura 7 - Mísula genérica.



Fonte: Calderón, 2020.

Considerando isso, então o respectivo valor para α_2 é dado pela equação (43):

$$a_{21} = \frac{\alpha_2}{L'} * E * I_c$$

(42)

$$\alpha_2 = \frac{a_{21}}{E * I_c} * L'$$

(43)

2. Cálculo dos coeficientes de Guldan K_1 , K_2 , η_1 e η_2

Para calcular os fatores de carga, é utilizado o mesmo processo utilizado para o cálculo dos fatores de forma. A única diferença é que, neste caso, a ação é a das cargas externas atuando sobre a estrutura ao invés do recalque unitário.

❖ Carregamento distribuído constante

O acréscimo de M_0 é a única novidade nessa nova etapa para o cálculo dos coeficientes de Guldan (1956). Dessa forma, os deslocamentos \square_{11} , \square_{22} , \square_{12} e \square_{21} são iguais aos obtidos anteriormente. Porém os deslocamentos \square_{10} e \square_{20} são diferentes.

- Cálculo do deslocamento \square_{10} :

$$\delta_{10} = \int \frac{Ma(x) * Mc(x)}{E * I(x)} dx$$

(44)

$$Mc(x) = \frac{q * L}{2} * x - \frac{q}{2} * x^2$$

(45)

Onde:

$Ma(x)$: Equação do momento fletor para $X1=1$; e

$Mc(x)$: Equação do momento fletor para a carga distribuída q .

q : Carga distribuída.

- Cálculo do deslocamento \square_{20} :

$$\delta_{20} = \int \frac{Mb(x) * Mc(x)}{E * I(x)} dx$$

(46)

Onde:

$M_b(x)$: Equação do momento fletor para $X_2=1$; e

$M_c(x)$: Equação do momento fletor para a carga distribuída q .

Resolvendo-se o sistema de equações formado com todos os deslocamentos já calculados, obtêm-se os valores de X_1 e X_2 , de acordo com a equação (36).

Assim, os valores dos fatores de carga são $m_{12}=X_1$ e $m_{21}=X_2$. Os valores de K_1 e K_2 podem ser obtidos com as equações (48) e (50).

$$m_{12} = K_1 * \frac{q * L^2}{12}$$

(47)

$$K_1 = m_{12} * \frac{12}{q * L^2}$$

(48)

$$m_{21} = K_2 * \frac{q * L^2}{12}$$

(49)

$$K_2 = m_{21} * \frac{12}{q * L^2}$$

(50)

❖ Carga concentrada

A única mudança no cálculo dos coeficientes de Guldán (1956) para carga concentrada são as equações, pois a viga é dividida em duas partes pela carga concentrada.

- Cálculo do deslocamento \square_{10} :

$$\delta_{10} = \int \frac{M_a(x) * M_c(x)}{E * I(x)} dx$$

(51)

$$M_c = \begin{cases} VA * x & \text{se } (0 \leq x \leq PAF) \\ VA * x - P * (x - PAF) & \text{se } (PAF \leq x \leq L) \end{cases} \quad (52)$$

$$VB = \frac{P * (PAF)}{L} \quad (53)$$

$$VA = P - VB \quad (54)$$

Onde:

Ma (x): Equação do momento fletor para $X_1=1$;

Mc (x): Equação do momento fletor para a carga concentrada P;

P: Carga concentrada;

VA: Reação de apoio na extremidade 1;

VB: Reação de apoio na extremidade 2; e

PAF: Ponto de aplicação da carga concentrada.

- Cálculo do deslocamento δ_{20} :

$$\delta_{20} = \int \frac{M_b(x) * M_c(x)}{E * I(x)} dx \quad (55)$$

Onde:

Mb (x): Equação do momento fletor para $X_2=1$ e

Mc (x): Equação do momento fletor para a carga concentrada P.

Resolvendo-se o sistema de equações formado com todos os deslocamentos já calculados, obtêm-se os valores de X_1 e X_2 , de acordo com a equação (36).

Assim, os valores dos fatores de carga são $m_{12}=X_1$ e $m_{21}=X_2$. Os valores para η_1 e η_2 , são obtidos pelas equações (57) e (59).

$$m_{12} = \eta_1 * P * L$$

(56)

$$\eta_1 = m_{12} * \frac{1}{P * L}$$

(57)

$$m_{21} = \eta_2 * P * L$$

(58)

$$\eta_2 = m_{21} * \frac{1}{P * L}$$

(59)

3. Coeficiente de Guldán (1956) para casos derivados

Os fatores de derivados são obtidos de uma viga que possui um engaste em uma das extremidades e um apoio na outra.

❖ Coeficiente W

Utilizando-se os fatores de forma fundamentais, já estudados anteriormente, podem ser obtidos os valores numéricos correspondentes aos coeficientes de Guldán (1956) para essa situação, chegando-se assim à relação (60).

$$W = \left(\frac{a_1 * a_2 - \beta^2}{a_2} \right)$$

(60)

❖ Coeficiente Z

O coeficiente Z, pode ser obtido da mesma forma que o coeficiente W, utilizando-se os fatores de carga fundamentais para carga distribuída e carga concentrada, já calculados anteriormente.

- Coeficiente Z para carga distribuída constante:

$$Z = (K_1 + K_2 * \frac{\beta}{a_2})$$

(61)

- Coeficiente Z para carga concentrada:

$$Z = (\eta_1 + \eta_2 * \frac{\beta}{a_2})$$

(62)

4. Cálculo dos momentos finais nas extremidades de uma viga biengastada

Os momentos finais nas extremidades de uma viga biengastada, com momento de inércia da seção transversal variável ao longo do seu eixo, podem ser calculados aplicando-se o Princípio da Superposição de Efeitos:

$$M_1 = m_{12} + a_{12} * X_1 + b_{12} * X_2$$

(63)

$$M_2 = m_{21} + a_{21} * X_2 + b_{21} * X_1$$

(64)

Se a viga possuir um engaste em uma das extremidades e um apoio na outra, são utilizados os fatores derivados correspondentes, isto é, para os fatores de forma os coeficientes W e para os fatores de carga os coeficientes Z, indicados nas equações (60), (61) e (62).

Implementação computacional

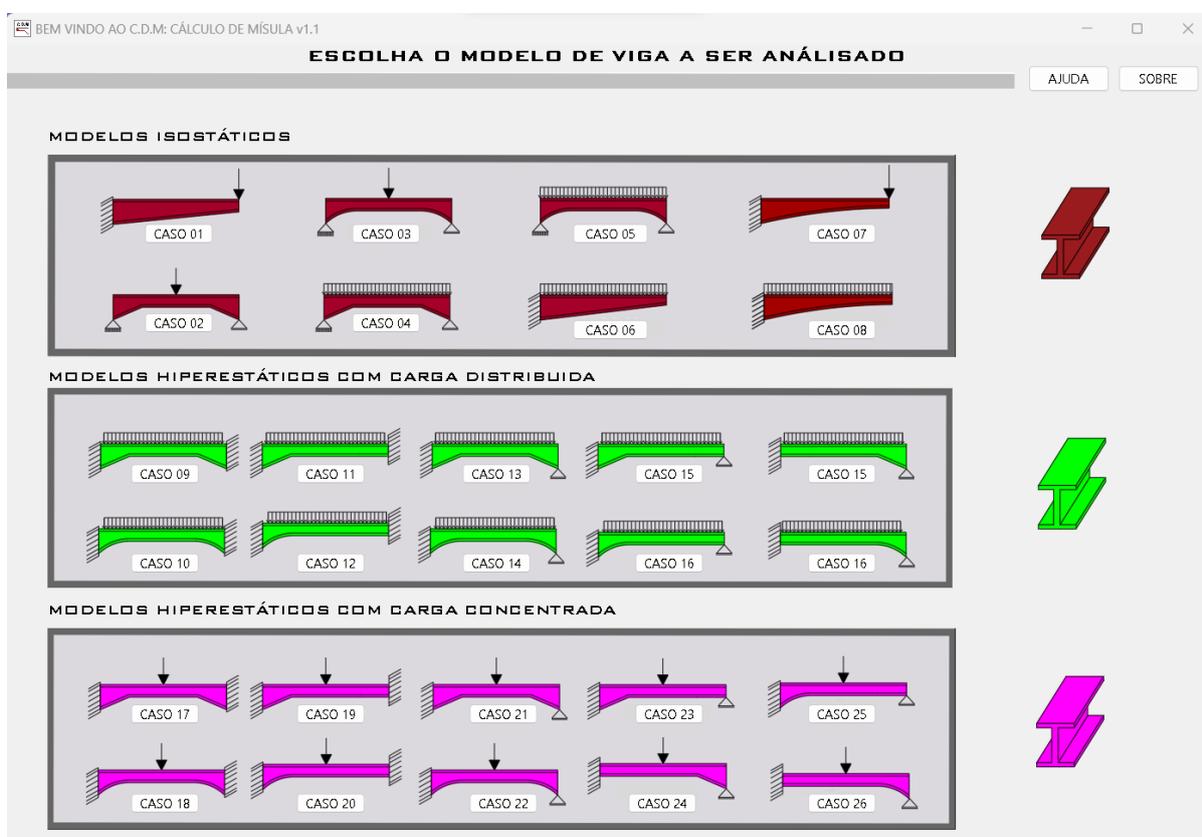
O programa é implementado no ambiente de desenvolvimento integrado LAZARUS, que tem como código fonte a linguagem Pascal, o que facilita a manipulação e programação das equações e metodologias apresentadas anteriormente para o cálculo para vigas metálicas

com mísulas. O aplicativo permite analisar 26 casos de vigas com mísulas com carga uniformemente distribuída e carga concentrada.

340

A interface de entrada do programa apresenta graficamente os 26 casos, dando a opção de escolher o caso a ser analisado, por meio de botões que representam a estrutura, como mostra a figura 8.

Figura 8 - Página inicial do programa C.D.M.



Fonte: Autores, 2023.

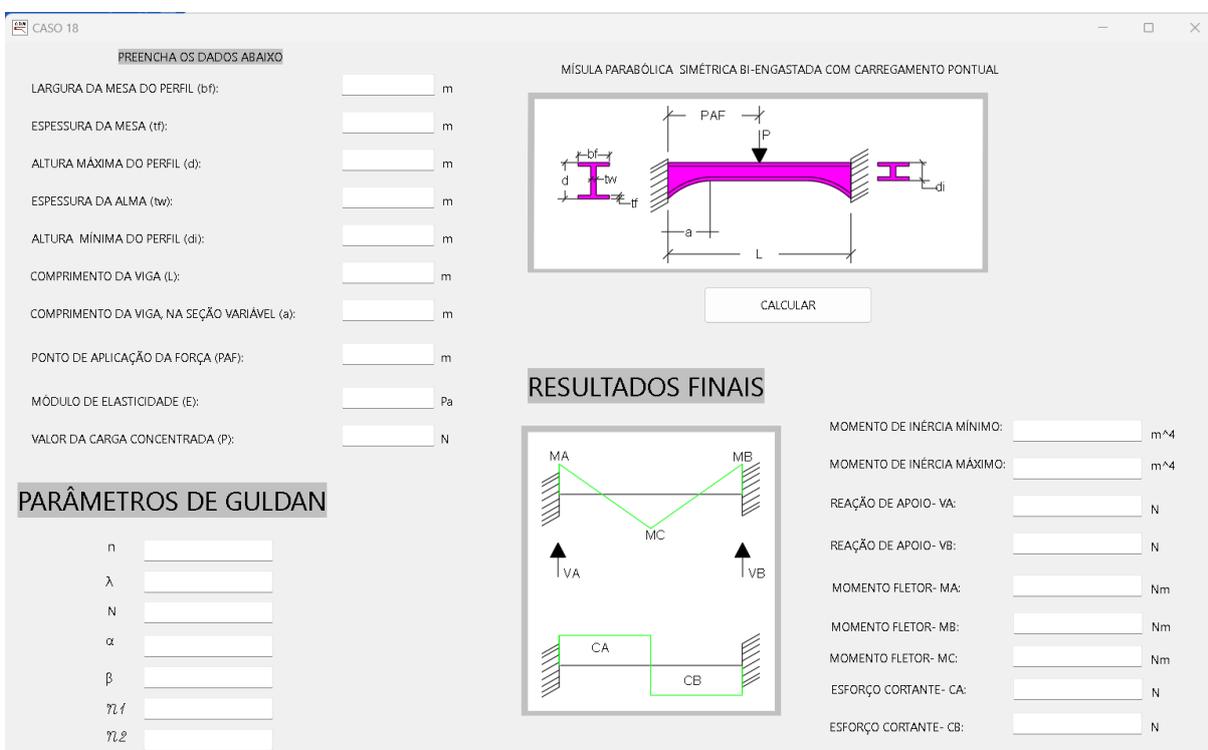
Após definir a interface, o processo seguinte foi construir cada caso de forma separada, para produzir uma análise correta dos dados.

Em cada caso, as integrais foram resolvidas utilizando a quadratura de GAUSS com 7 e 5 pontos, dependendo do grau das funções envolvidas, para dar uma melhor aproximação. O objetivo dos modelos isostáticos é o cálculo dos esforços solicitantes e o deslocamento no ponto de aplicação da força para os carregamentos concentrados e o deslocamento no meio do

vão para as vigas com carregamento distribuído. Já para os modelos hiperestáticos, o foco é unicamente nos esforços solicitantes.

Após pressionar o botão que leva ao modelo desejado, como por exemplo o do caso 18, mostrado na figura 9, é necessário preencher com os dados de entrada pedidos e pressionar o botão CALCULAR. Em seguida os resultados serão apresentados nas caixas de texto que ficaram em branco.

Figura 9 - Página de cálculo do caso 18.



CASO 18

PREENCHA OS DADOS ABAIXO

LARGURA DA MESA DO PERFIL (bf): m

ESPESSURA DA MESA (tf): m

ALTURA MÁXIMA DO PERFIL (d): m

ESPESSURA DA ALMA (tw): m

ALTURA MÍNIMA DO PERFIL (di): m

COMPRIMENTO DA VIGA (L): m

COMPRIMENTO DA VIGA, NA SEÇÃO VARIÁVEL (a): m

PONTO DE APLICAÇÃO DA FORÇA (PAF): m

MÓDULO DE ELASTICIDADE (E): Pa

VALOR DA CARGA CONCENTRADA (P): N

MISULA PARABÓLICA SIMÉTRICA BI-ENGASTADA COM CARREGAMENTO PONTUAL

CALCULAR

RESULTADOS FINAIS

MOMENTO DE INÉRCIA MÍNIMO: m⁴

MOMENTO DE INÉRCIA MÁXIMO: m⁴

REAÇÃO DE APOIO- VA: N

REAÇÃO DE APOIO- VB: N

MOMENTO FLETOR- MA: Nm

MOMENTO FLETOR- MB: Nm

MOMENTO FLETOR- MC: Nm

ESFORÇO CORTANTE- CA: N

ESFORÇO CORTANTE- CB: N

PARÂMETROS DE GULDAN

n:

λ :

N:

α :

β :

η_1 :

η_2 :

Fonte: Autores, 2023.

O programa também conta com uma janela de AJUDA e SOBRE, onde na primeira é mostrado o passo a passo de como utilizar a ferramenta, e na segunda são encontradas algumas informações sobre o programa.

Resultados e análise

Os resultados obtidos com o programa de cálculo C.D.M (Cálculo de Mísulas), são utilizados para comparar com os resultados obtidos com outros aplicativos já existentes, a fim

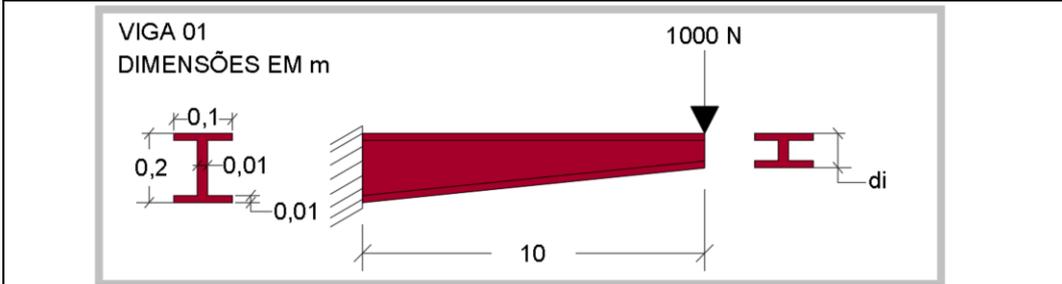
de mostrar o nível de aproximação desses resultados. Os aplicativos escolhidos para comparação são o MisulaMath 2.0 para os casos hiperestáticos e o LTBeamN para comparação dos casos isostáticos.

A comparação é feita de forma individual em cada um dos aplicativos, dos casos 01 ao 08 utilizando o LTBeamN. Já para os casos do 09 até o 26, os resultados são comparados com o MisulaMath 2.0.

Na tabela 1 mostra a comparação feita para o caso 01.

- Comparação dos deslocamentos obtidos no caso 01:

Tabela 1 - Teste do caso 01.



DESLOCAMENTOS MÁXIMOS OBTIDOS NOS PROGRAMAS			
di (cm)	DESLOCSMENTO LTBeamN (m)	DESLOCSMENTO C.D.M (m)	DIFERENÇA (%)
18	0,07362	0,07362	0,0014%
15	0,08155	0,08154	0,0074%
12	0,09178	0,09178	0,0033%
10	0,10050	0,10052	-0,0199%
9	0,10570	0,10571	-0,0095%

Fonte: Autores, 2023.

Observando-se os dados, pôde ser feita uma análise da diferença dos resultados apresentados pelo dois aplicativos. A maior variação obtida foi de $\pm 0,13$ mm demonstrando um erro de aproximadamente 1,1%. Ou seja, o programa cumpre com seu objetivo de fornecer deslocamentos precisos.

Para a análise dos casos hiperestáticos, foi considerado para comparação o caso 09, demonstrado na tabela 2.

Tabela 2 - Comparação do caso 09.

COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS NO CASO 09												
DADOS DE ENTRADA				bf (m)	tf (m)	d (m)	tw (m)	di (m)	L (m)	a (m)	E (Pa)	Q (N/m)
				0,1	0,01	0,22	0,01	0,17	5	1	10	5
C.D.M	n	l	a	b	K1	K2	VA (N)	VB (N)	MA (Nm)	MB (Nm)	CA (N)	CB (N)
	0,5439	0,2000	5,0259	2,7934	1,0717	-1,0717	12,5000	12,5000	11,1638	-11,1638	12,5000	-12,5000
MISULA MATH	n	l	a	b	K1	K2	VA (N)	VB (N)	MA (Nm)	MB (Nm)	CA (N)	CB (N)
	0,5439	0,2000	5,0259	2,7934	1,0717	-1,0717	12,5000	12,5000	11,1638	-11,1638	12,5000	-12,5000
DIFERENÇA (%)												
	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%

Fonte: Autores, 2023.

Ao realizar a comparação entre os resultados obtidos entre os programas C.D.M e MisulaMath 2.0, nota-se então a fidelidade dos resultados obtidos, visto que a maior diferença entre os resultados foi de 0,16%. Dessa forma, pode-se concluir a eficácia da ferramenta.

Considerações finais

Como todos os 26 casos verificados e comparados, é possível concluir que o C.D.M cumpre com seu objetivo, fornecendo valores confiáveis e podendo assim realizar a análise de uma ou mais vigas de aço contendo mísulas. Além disso, o aplicativo pode ser usado para auxiliar na resolução de estruturas pelo método dos deslocamentos, visto que o mesmo fornece os coeficientes de Guldán e os valores dos momentos nas extremidades da viga.

Outro fato importante a ser analisado, é a contribuição positiva desse trabalho para a área de estruturas de aço da engenharia civil, pois é pouco o conteúdo existente para estudo a respeito de mísulas, principalmente mísulas com variação parabólica. Este trabalho aqui estudado, não esgota ainda o que poderá ser explorado posteriormente e deixa aberto um espaço para realização de outros estudos mais elaborados nesse tipo de estruturas.

Referências

BORTOLOTI, M. A. A. **Integração Numérica - Quadratura Gaussiana**. Bahia. Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, 2017. Disponível em: <http://www2.uesb.br/professor/mortoloti/wpcontent/uploads/2018/03/aula13hp.df>

CALDERÓN, E. T. Cálculo de deslocamentos em estruturas isostáticas de barras com momento de inércia variável utilizando-se integração numérica. **Revista Mirante**, v. 10, n. 2, Anápolis, 2017.

CALDERÓN, E. T. Cálculo de deslocamentos em estruturas isostáticas de barras com momento de inércia variável utilizando-se a Quadratura De Gauss. **Revista Mirante**, v. 11, n. 7, Anápolis, 2018.

GULDAN, R. **Estructuras aporricadas y vigas contínuas**. Buenos Aires. El Ateneo, 1956.

HIBBELER, R. C. **Resistencia dos Materiais: Energia de deformação**. 7ª ed. São Paulo. Pearson, 2010.

MARTHA, L. F. **Análise de Estruturas: Conceitos e Métodos Básicos**. Rio de Janeiro. Elsevier, 2010.

SOUZA, V. B. **Cálculo de Esforços em Barras com Momento de Inércia Variável**. Trabalho de Conclusão de Curso, Curso de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Goiás, Anápolis, GO, 120 p., 2018.

SÜSSEKIND, J. C. **Curso De Análise Estrutural – Deformações em estruturas. Método das forças**. v2. 4ª ed. Rio de Janeiro. Globo, 1980.

SÜSSEKIND, J. C. **Curso de Análise Estrutural – Método das deformações. Processo de Cross**. v3. 4ª ed. Rio de Janeiro. Globo, 1980.