Revista Mirante, Anápolis (GO), v. 17, n. 1, p. 300-316, jun. 2024. ISSN 1981-4089

A EQUAÇÃO DE VERHULST: ESTUDO E MODELAGEM DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA PARA A DINÂMICA POPULACIONAL DE ANÁPOLIS

THE VERHULST EQUATION: STUDY AND MODELING OF AN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION FOR THE POPULATION DYNAMICS OF ANÁPOLIS

PEDRO HENRIQUE AQUINO DE ALMEIDA
Universidade Estadual de Goiás (UEG), Anápolis - GO
pedroohaquino@gmail.com

LEANDRO DANIEL PORFIRO
Universidade Estadual de Goiás (UEG), Anápolis - GO
fisicoleandro@yahoo.com.br

TIAGO DE LIMA BENTO PEREIRA
Universidade Estadual de Goiás (UEG), Anápolis - GO
tiago.ibpmat@ueg.br

Resumo: Devido à importância, para o planejamento público, de estimativas populacionais em períodos mais curtos, estimar a população, utilizando modelos matemáticos, é uma solução mais viável. O censo demográfico, realizado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), acontece a cada dez anos. Altos custos impossibilitam a realização de censos demográficos anualmente. Para obter tais estimativas destaca-se a importância da taxa de variação da população ao longo dos anos. A descrição de fenômenos que envolvem a taxa de variação dos dados observados faz uso de equações diferenciais. Assim, tem-se como objetivos obter um modelo matemático, utilizando a equação logística de Pierre François Verhulst, para a dinâmica populacional da cidade de Anápolis, Goiás, Brasil, considerando dados dos censos demográficos do período de 1980 a 2022, comparar com as estimativas divulgadas pelo IBGE e estimar a população de Anápolis para 2023. Utiliza-se a pesquisa quali-quantitativa, bibliográfica e de caráter exploratório. Por meio de revisão bibliográfica, busca-se entender o surgimento do modelo de dinâmica populacional de Pierre François Verhulst. Estabelecido o modelo de Verhulst, utiliza-se o método dos Mínimos Quadrados para definição dos parâmetros, da equação logística, condizentes com os dados do IBGE relativos ao município de Anápolis. Na determinação dos parâmetros tem-se coeficiente de determinação igual a 0,967892531. Destaca-se, dentre as comparações de população estimada pelo IBGE e pelo modelo desenvolvido, o menor erro relativo obtido igual a 0,038% e o maior erro relativo obtido igual a 4,055%. Para 2023, estima-se uma população igual a 402.564 pessoas.
Palavras-chave: Anápolis, Goiás, Brasil. Dinâmica populacional. Equação logística. Modelagem Matemática.

Abstract: Given the importance of population estimates over shorter periods for public planning, estimating the population using mathematical models is a more viable solution. The demographic census, carried out by the Brazilian Institute of Geography and Statistics (IBGE), takes place every ten years. High costs make it impossible to carry out demographic censuses every year. In order to obtain these estimates, the rate of population change over the years is essential. The description of phenomena involving the rate of change of observed data uses differential equations. Thus, the objectives are to obtain a mathematical model, using Pierre François Verhulst's logistic equation, for the population dynamics of the city of Anápolis, Goiás, Brazil, considering data from demographic censuses from 1980 to 2022; to compare with the estimates published by the IBGE; and to estimate the population of Anápolis

for 2023. This study is a qualitative-quantitative, bibliographical, and exploratory research. A bibliographical review seeks to understand the emergence of Pierre François Verhulst's population dynamics model. Once Verhulst's model has been established, the Least Squares method is used to define the parameters of the logistic equation, consistent with the IBGE data for the municipality of Anápolis. The coefficient of determination for the parameters was 0.967892531. Among the comparisons of the population estimated by the IBGE and the model developed, the lowest relative error obtained was 0.038%, and the highest relative error was 4.055%. A population of 403,232 people is estimated for 2023.
Keywords: Anápolis, Goiás, Brazil. Population dynamics. Logistic equation. Mathematical modeling.

Introdução

No presente artigo modela-se uma função que se aproxima ao comportamento de crescimento/decrescimento do número de indivíduos da população da cidade de Anápolis, Goiás, Brasil. Para isto, utiliza-se o modelo de dinâmica populacional de Pierre François Verhulst[1] (1804-1849) dado em termos de equações diferenciais.

De acordo com Boyce e DiPrima (2006, p. 1) “Muitos dos princípios, ou leis, que regem o comportamento do mundo físico são proposições, ou relações, envolvendo a taxa segundo a qual as coisas acontecem”. Matematicamente, essas relações podem ser expressas em linguagem matemática como equações e as taxas a qual as coisas acontecem, isso é, taxas de variação, podem ser tratadas como as derivadas. Deste modo, Zill (2011) define equação diferencial como sendo toda equação que contém derivadas de uma (ou mais) variável(eis) dependente(s) em relação a uma (ou mais) variável(eis) independente(s).

Nesse sentido de entendimento de fenômenos, as equações diferenciais, como modelo matemático, se fazem presentes em diversos campos da ciência. No campo da Física, por exemplo, pode-se lançar mão dessas equações para entender/descrever o movimento de corpos sólidos, sistemas massa-mola, circuitos elétricos em série, dentre outros. Em Ciências da Natureza pode-se modelar o crescimento de uma colônia de bactérias ou a relação entre predador e presa em seus habitats. Em Ciências Sociais usa-se de dinâmicas populacionais, de modo que a predição do comportamento de uma população pode ajudar a planejar políticas públicas de qualidade. Enfim, são diversas as aplicações das equações diferenciais, evidenciando sua importância para o desenvolvimento da ciência e, consequentemente, da sociedade.

[1] Pierre François Verhulst foi um importante matemático belga. Lecionou na Universidade de Bruxelas e também na Academia Militar idealizada pelo Rei Leopoldo I. Verhulst se interessou por diversas áreas, como o estudo de funções elípticas, contudo seu trabalho de maior notoriedade foi o desenvolvimento da equação diferencial conhecida como equação logística. Verhulst morreu em 1849, provavelmente devido a tuberculose. (BOYCE e DIPRIMA, 2006); (ROBERTSON e O’CONNOR, 2014)

Nesse trabalho tem-se como objetivos obter um modelo matemático, utilizando a equação logística de Pierre François Verhulst, para a dinâmica populacional da cidade de Anápolis, Goiás, Brasil, considerando dados dos censos demográficos do período de 1980 a 2022, comparar com as estimativas divulgadas pelo IBGE e estimar a população de Anápolis para 2023. Utiliza-se a pesquisa quali-quantitativa, bibliográfica e de caráter exploratório. Por meio de revisão bibliográfica, busca-se entender o surgimento do modelo de dinâmica populacional de Pierre François Verhulst. Estabelecido o modelo de Verhulst, utiliza-se o método dos Mínimos Quadrados para definição dos parâmetros, da equação logística, condizentes com os dados do IBGE relativos ao município de Anápolis.

Contextualização

Município de Anápolis

Fundado em 31 de julho de 1907, Anápolis localiza-se no interior do estado de Goiás, no Brasil. Atualmente, segundo o último censo realizado pelo IBGE em 2022, Anápolis possui 398.817 habitantes distribuídos em uma área de $935{,}672\, km^2$, conferindo uma densidade demográfica de $426{,}24\ \ hab/km^2$. A população da cidade é majoritariamente urbana.

O desenvolver das equações diferenciais

O surgimento das equações diferenciais está intrinsecamente vinculado à história do cálculo diferencial e integral, já que essas equações envolvem derivadas.

Segundo Boyer e Merzbach (2012, *apud* SOUZA *et al*, 2021), o surgimento do cálculo diferencial e integral se deu por volta do século XVI e XVII, após os estudiosos se depararem com dois problemas da área da Física e Matemática. De acordo com Souza *et al* (2021)

> O primeiro estava relacionado à obtenção da taxa de variação instantânea de uma quantidade em um dado instante, ou, em termos geométricos, a obtenção da reta tangente a uma curva em um determinado ponto. Este problema levou ao desenvolvimento do cálculo diferencial. Já o segundo problema se preocupava com o que era chamado de quadratura, ou cálculo de áreas sob uma dada curva, e levou ao desenvolvimento do cálculo integral (p.142).

Revista Mirante, Anápolis (GO), v. 17, n. 1, p. 300-316, jun. 2024. ISSN 1981-4089

No desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, embora vários estudiosos tenham se debruçado sobre o tema, dois se destacam como pioneiros. São eles Isaac Newton (1642-1716) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

Tanto Newton quanto Leibniz, embora de maneira independente, alcançaram os mesmos resultados, como, por exemplo, a derivada como sendo a solução do problema de taxa de variação instantânea da velocidade de um corpo, além da relação de "operação inversa" entre a derivada e a integral (SOUZA *et al*, 2021).

Quanto às equações diferenciais, segundo Alitolef *et al* (2010), Newton descreveu todos os movimentos de corpos sólidos através de um conjunto de equações diferenciais que, mais tarde, vieram a ser conhecidas como equações do movimento de Newton e serviram como objeto de estudo de grandes matemáticos como Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), que desenvolveu estudos sobre força gravitacional, e outros. Ainda segundo o autor, Leibniz contribuiu para o desenvolvimento do campo das equações diferenciais de maneira mais teórica e suas contribuições mais notáveis são "o método da separação de variáveis, redução de equações homogêneas e procedimentos para resolver equações lineares de primeira ordem" (ALITOLEF *et al*, 2010, p.78).

Grandes nomes da matemática contribuíram de forma significante para o desenvolvimento do campo das equações diferenciais, como os irmãos Jakob Bernoulli (1654-1705) e Johann Bernoulli (1667-1748), que contribuíram tanto na ampliação dos campos de aplicação, como no desenvolvimento da famosa equação de Bernoulli. Em particular, destaca-se a contribuição do grande matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) que, segundo Boyer e Merzbach (2012)

> Euler foi, sem dúvida, o maior responsável pelos métodos de resolução usados hoje nos cursos introdutórios sobre equações diferenciais, e até muitos dos problemas específicos que aparecem em livros didáticos de hoje remontam aos grandes tratados que Euler escreveu sobre o cálculo — Institutiones calculi differentialis (Petersburgo, 1755) e Institutiones calculi integralis (Petersburgo, 1768-1770, 3 volumes). O uso de fatores integrantes, os métodos sistemáticos para resolver equações lineares de ordem superior a coeficientes constantes, e a distinção entre equações lineares homogêneas e não homogêneas, e entre solução particular e solução geral, estão entre suas contribuições ao assunto (p. 308)

Nos últimos anos o campo das equações diferenciais tem apresentado diversas aplicações, principalmente devido ao avanço computacional acentuado das últimas décadas. Trajetórias de naves e foguetes, reações químicas em soluções, decaimento de certos radiofármacos utilizados para exames são algumas das aplicações recentes de equações diferenciais que tem facilitado o desenvolvimento da ciência.

Classificação das equações diferenciais

As presentes definições têm como base as obras de Boyce e DiPrima (2006) e Zill (2011). Segundo Zill (2011, p.2): “Uma equação que contém derivadas (ou diferenciais) de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes é chamada de equação diferencial”.

Quanto à quantidade de variáveis independentes

As equações diferenciais podem ser classificadas em dois tipos: ordinárias e parciais. Em uma equação diferencial ordinária (EDO) a(s) função(ões) desconhecida(s) possui(possuem) uma variável independente, enquanto em uma equação diferencial parcial (EDP) a função desconhecida possui mais de uma variável independente.

Por exemplo:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+3y=0$$

é uma equação diferencial ordinária, visto que as variáveis y e x dependem da variável independente t.

Já a equação

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{du}+3y=0$$

é uma equação diferencial parcial, pois a variável y depende das variáveis independentes t e u.

Quanto à ordem, a ordem de uma equação diferencial é a ordem da derivada de maior ordem que figura na equação. Dada uma função $y(t)$, a equação diferencial dada na forma

$$F(t,y,y',y'',\dots,y^n)=0,$$

onde $y^{(n)}=\frac{d^ny}{dt^n}$, pode ser reescrita como

$$\frac{d^ny}{dt^n}=f(t,y',y'',\dots,y^{n-1}),$$

e se classifica como uma EDO de ordem n.

Revista Mirante, Anápolis (GO), v. 17, n. 1, p. 300-316, jun. 2024. ISSN 1981-4089

Como exemplo, a equação

$$\frac{d^3y}{dt^3} + \frac{dy}{dt} + 3y = 0,$$

é uma EDO de terceira ordem.

Classificação de uma EDO quanto a sua linearidade; uma EDO é dita linear se for escrita da forma

$$a_n(t)\frac{d^ny}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)t = g(t),$$

com $a_1(t), a_2(t), \ldots, a_n(t)$ coeficientes que, quando muito, dependem da variável independente t. A exemplo, temos que a equação

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} = 0,$$

é uma EDO de segunda ordem linear.

Já a equação

$$(4 - y)\frac{dy}{dt} - 3y = 0,$$

é dita não linear, devido ao coeficiente $(4 - y)$ depender da função $y(t)$.

Modelo de dinâmica populacional de Verhuls.

O modelo de dinâmica populacional de Verhulst, ou equação logística ou, simplesmente equação de Verhulst, é um modelo matemático dado em termos de equações diferenciais que tem como objetivo realizar a modelagem do comportamento da quantidade de indivíduos de uma população em um ambiente, à medida que o tempo passa. Em palavras mais simples, o modelo de Verhulst busca estudar uma população e prever se a mesma irá crescer, decrescer, oscilar ou permanecer constante no decorrer do tempo.

Para dar sentido à discussão, sobre o modelo de Verhulst, primeiramente, é necessário elucidar as contribuições de outro estudioso do tema, o inglês Thomas Robert Malthus (1766-1834). Segundo Cecconello (2006) e Teixeira (2012) Malthus foi pioneiro no que se diz respeito à dinâmica populacional ao propor o crescimento em progressão geométrica de uma população. Ainda segundo Teixeira (2012), embora essa proposição de crescimento geométrico de uma população já tivesse sido postulada por Euler, o fato de Malthus tratar o tema de forma polêmica fez com que o mesmo ganhasse notoriedade, mesmo que sua obra não apresentasse grande rigor matemático. Nos estudos de Malthus, o mesmo observou que a população dos Estados Unidos dobrava a cada 25 anos no século XVIII, o que mais tarde não se comprovou. De acordo com Boyce e DiPrima (2006) o modelo de Malthus em equações diferenciais é dado por

$$\frac{dy}{dt} = ry, \tag{1}$$

exposto na equação (1), em que r é a taxa de crescimento/decrescimento intrínseco de uma população y em um dado instante t.

Contudo, como ressalta Cecconello (2006) e Boyce e DiPrima (2006), o modelo de Malthus é dado em condições ideais. Nesse sentido, inspirado no modelo de Malthus, Verhulst desenvolveu a equação logística.

De acordo com Bacaër, Viana e Doutor (2021), no ano de 1985, juntamente com Adolphe Quetelet (1796-1874), Verhulst

> [...] publicou Um Tratado sobre *o Homem e o Desenvolvimento das suas Faculdades*. Quetelet sugeriu que as populações não podiam crescer geometricamente durante um longo período de tempo porque os obstáculos mencionados por Malthus formavam uma espécie de «resistência», que ele pensava (por analogia com a mecânica) ser proporcional ao quadrado da velocidade de crescimento da população. Esta analogia não tinha uma base real, mas inspirou Verhulst. (p. 36-37)

Dessa inspiração, Verhulst percebeu que, diferentemente da analogia à mecânica, cada população possuía um limite de crescimento cujo ambiente suportava, isto é, uma capacidade de suporte. Ainda segundo Bacaër, Viana e Doutor (2021), Verhulst aperfeiçoou equações diferenciais por meio do estudo das populações da França e, principalmente, da Bélgica. Boyce e DiPrima (2006) apresentam a equação de Verhulst (equação logística) como

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{k}\right)y, \tag{2}$$

onde r é a taxa de crescimento/decrescimento intrínseco de uma população y em um dado instante t e k é a capacidade de suporte do ambiente, ou, em outras palavras, a capacidade populacional sustentável do ambiente.

Equações diferenciais e Modelo de Verhulst: equação e solução

Modelo de Verhulst: equação

Mediante estudos baseados nas obras de Boyce e DiPrima (2006) e Zill (2011), infere-se algumas interpretações sobre o modelo de Verhulst a partir do modelo de Malthus.

Buscando compreender e determinar o modelo de Verhulst expõe-se, primeiramente, o modelo de Malthus. O modelo de Malthus afirma que dada uma população, com y indivíduos e considerando uma situação ideal, essa cresce/decresce ao longo do tempo t, de modo que a taxa de variação de y é proporcional à quantidade de indivíduos no instante t. Em termos de equações diferenciais, pode ser descrita por

$$\frac{dy}{dt} = ry \qquad (1)$$

onde r é uma constante, de proporcionalidade, chamada de taxa de crescimento/decrescimento.

Para tal modelo, resolvendo-se a equação (1), tem-se que a população é

$$y = y_0 e^{rt}, \qquad (3)$$

em que y_0 é a população inicial.

Diferentemente do modelo de Malthus, de acordo com Zill (2011) e Boyce e DiPrima (2006), a equação de Verhulst não considera uma taxa de crescimento r constante, mas uma taxa de crescimento que depende da população, isto é, considera-se $r \cong f(y)$. Verhulst considera que a população pode sofrer efeitos inibidores em seu crescimento fazendo com que a taxa de crescimento r diminua com o passar do tempo. A população não cresce indefinidamente, tendo, assim, uma capacidade suporte do ambiente ou capacidade populacional sustentável do ambiente, denotada, aqui, por K. Adaptando o modelo de Malthus, dado na equação (1), tem-se

$$\frac{dy}{dt} = yf(y). \qquad (4)$$

Pode-se inferir que $f(K) = 0$, já que, neste ponto, a população atingiria a capacidade de suporte do ambiente e assim a taxa de variação de y é igual a zero.

De acordo com Boyce e DiPrima (2006), a função $f(y)$ deve se aproximar da taxa de crescimento r quando a população for pequena, decrescer à medida que a população crescer e que $f(y) < 0$ quando a população for suficientemente grande. A função $f(y)$ mais simples que garante tais requisitos é a função linear

$$f(y) = r - ay,$$

em que a é uma constante positiva.

Dada a condição $f(K) = 0$, segue que

$$r - aK = 0$$

$$a = \frac{r}{K}.$$

Reescrevendo e manipulando a equação (4) obtêm-se:

$$\frac{dy}{dt} = y(r - ay)$$

$$\frac{dy}{dt} = y\left(r - \frac{r}{K}y\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y. \tag{2}$$

A equação (2) é a equação de Verhulst (equação logística).

Considerando uma população inicial $y(t_0) = y_0$ tem-se:

$$\begin{cases} f(y) = r - ay \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}.$$

Solução da equação de Verhulst

Para determinar a solução da equação de Verhulst, equação (2), utiliza-se o método de resolução por variáveis separáveis. Assim

$$\frac{dy}{\left(1 - \frac{y}{K}\right)y} = rdt. \tag{5}$$

Integrando o lado esquerdo e o lado direito da equação (5)

Determinando a integral

$$\int \frac{dy}{y\left(1 - \frac{y}{K}\right)} \tag{6}$$

Revista Mirante, Anápolis (GO), v. 17, n. 1, p. 300-316, jun. 2024. ISSN 1981-4089

Considera-se a decomposição em frações parciais:

$$\frac{1}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{\left(1-\frac{y}{K}\right)} = \frac{A\left(1-\frac{y}{K}\right)+By}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)}$$

$$\frac{1}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)} = \frac{A\left(1-\frac{y}{K}\right)+By}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)} \tag{7}$$

Desta forma, para que a igualdade (7) seja verdadeira

$$A\left(1-\frac{y}{K}\right)+By=1$$

$$A-\frac{Ay}{K}+By=1$$

$$y\left(B-\frac{A}{K}\right)+A=1$$

e

$$A=1$$

$$B-\frac{A}{K}=0 \quad \Rightarrow B=\frac{1}{K}.$$

Portanto

$$\frac{1}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)} = \frac{1}{y} + \frac{\frac{1}{K}}{\left(1-\frac{y}{K}\right)} \tag{8}$$

Substituindo (8) em (6)

$$\int \frac{dy}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)} = \int \left(\frac{1}{y} + \frac{\frac{1}{K}}{\left(1-\frac{y}{K}\right)}\right)dy$$

$$\int \frac{dy}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)} = \int \frac{1}{y}dy + \int \frac{\frac{1}{K}}{(1-\frac{y}{K})}dy\,. \tag{9}$$

Para resolução da última integral em (9) realiza-se a mudança de variável com

$$u=1-\frac{y}{k}$$

$$du=-\frac{1}{K}\,dy \quad \Rightarrow \quad dy=-\frac{du}{\frac{1}{K}}$$

Portanto, resolvendo (9)

$$\int \frac{dy}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)} = ln(y) - ln\left(1-\frac{y}{K}\right) + C_1 \tag{10}$$

Determinando a integral

$$\int rdt = rt + C_2. \tag{11}$$

Desse modo, obtém-se:

$$\frac{dy}{\left(1-\frac{y}{K}\right)y} = rdt$$

$$\int \frac{dy}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)} = \int rdt$$

$$ln(y) - ln\left(1-\frac{y}{K}\right) + C_1 = rt + C_2 \tag{12}$$

Utilizando propriedades de logaritmo e $C_3 = C_2 - C_1$, segue que

$$ln\left(\frac{y}{\left(1-\frac{y}{K}\right)}\right) = rt + C_3$$

$$\left(\frac{y}{\left(1-\frac{y}{K}\right)}\right) = e^{rt+C_3}. \tag{13}$$

Considerando $e^{C_3} = C$, a equação (13) é escrita como

$$\frac{y}{\left(1-\frac{y}{K}\right)} = Ce^{(rt)}.$$

Isolando y:

$$y = \frac{KCe^{(rt)}}{K + Ce^{(rt)}}. \tag{14}$$

A equação (14) é a solução geral para a equação de Verhulst.

Para determinar a constante C utiliza-se a condição inicial de $y(t_0) = y_0 > 0$ na equação (14). Substituindo, a condição $y(t_0) = y_0$, tem-se

$$y_0 = \frac{KCe^{(rt_0)}}{K + Ce^{(rt_0)}} \Rightarrow$$

$$C = \frac{y_0 K}{(K - y_0)e^{(rt_0)}}$$

Dado o valor da constante C, substitui-se na equação (14), solução da equação de Verhulst, obtendo assim

$$y = \frac{K\left(\frac{y_0 K}{(K - y_0)e^{(rt_0)}}\right)e^{(rt)}}{K + \left(\frac{y_0 K}{(K - y_0)e^{(rt_0)}}\right)e^{(rt)}}$$

$$y = \frac{\left(\frac{K}{K - y_0}\right)(K y_0 e^{rt - rt_0})}{\left(\frac{K}{K - y_0}\right)(K - y_0 + y_0 e^{rt - rt_0})}$$

$$y = \frac{K y_0 e^{r(t - t_0)}}{K - y_0 + y_0 e^{r(t - t_0)}} \tag{15}$$

Observa-se que, em (14) quando t tende ao infinito a população y tende a K (capacidade suporte do ambiente), isto é, $\lim_{t \to \infty} y = K$. De fato, toma-se a função em (14)

$$\lim_{t \to \infty} y = \lim_{t \to \infty} \frac{KCe^{rt}}{K + Ce^{rt}}$$

$$\lim_{t \to \infty} y = \lim_{t \to \infty} \frac{KCe^{(rt)}}{Ce^{rt}\left(\frac{K}{Ce^{rt}} + 1\right)}$$

$$\lim_{t \to \infty} y = \lim_{t \to \infty} \frac{K}{\frac{K}{Ce^{rt}} + 1}$$

$$\lim_{t \to \infty} y = K$$

Modelagem da dinâmica populacional de Anápolis

Com objetivo de utilizar a equação de Verhulst para estimar a população de Anápolis e comparar com as estimativas fornecidas pela Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) é necessário determinar as constantes K e r, da equação (15) adequadas à dinâmica populacional de Anápolis. Para tal, optou-se por manipular a equação (2), obtendo:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = r - \frac{r}{K}y \tag{16}$$

Observa-se que o lado direito da equação (16) pode ser considerado uma função linear $\alpha y + \beta$, com $\alpha = \frac{-r}{K}$ e $\beta = r$.

Revista Mirante, Anápolis (GO), v. 17, n. 1, p. 300-316, jun. 2024. ISSN 1981-4089

Com os dados do censo demográfico do IBGE calcula-se, para os anos[2] de 1991, 2000 e 2010, uma aproximação para a taxa de crescimento $\frac{dy}{dt}$ da população. Utiliza-se, para tal aproximação, a média aritmética das aproximações obtidas pelo método das diferenças finitas para frente e para trás. As aproximações e os valores de $\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}$ são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 – População de Anápolis e aproximações para as taxas de variação

Ano	População	$\frac{dy}{dt}$	$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}$
1980	180012	-	-
1991	239378	5404,398989899	0,022576841
2000	288085	5032,344444444	0,017468263
2010	334613	5001,566666667	0,014947317
2022	398817	-	-

Fonte: IBGE (2023); Autores (2023)

Pelo método dos mínimos quadrados determina-se a função linear

$$h(y) = -0{,}000000080\text{y} + 0{,}041407378$$

que ajusta os pontos $\left(y, \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}\right)$ a uma reta, isto é,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} \cong -0{,}000000080\text{y} + 0{,}041407378,$$

tal ajuste possui coeficiente de determinação igual a 0,967892531. Esse ajuste se mostra bastante razoável, visto que, o coeficiente de determinação varia no intervalo $[0, 1]$ e quanto mais próximo de 1 melhor é o ajuste

Desse modo:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = r - \frac{r}{K}y, \tag{16}$$

com

$$r = 0{,}041407378$$

$$K = 577592\,.$$

Consequentemente tem-se que a solução da equação de Verhulst para a dinâmica populacional de Anápolis é

[2] Anos em que foram realizados o Censo demográfico pelo IBGE.

$$y = \frac{577592 y_0 e^{0,041407378(t-t_0)}}{577592 - y_0 + y_0 e^{0,041407378(t-t_0)}}. \quad (17)$$

Resultados e discussões

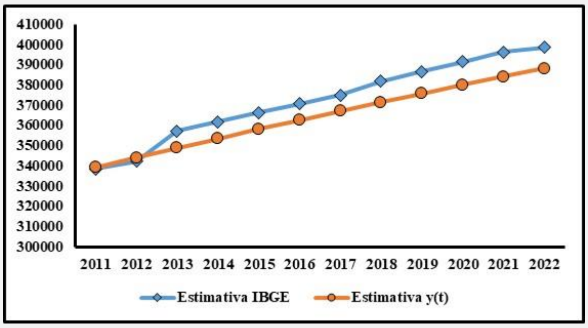
Utilizando a equação de Verhulst para a dinâmica populacional de Anápolis, dada em (17), obtém-se estimativas, $y(t)$, anuais, para a população de Anápolis no período de 2011 a 2022. A Tabela 1 exibe a estimativa da população de Anápolis divulgada pelo IBGE, a estimativa obtida por meio da equação (17), considerando $t_0 = 2010$ e $y(t_0) = 334613$ (população de Anápolis em 2010) e o erro relativo quando comparadas as duas estimativas.

Tabela 1 – Estimativa da quantidade da população de Anápolis: $t_0 = 2010$

Ano (t)	Estimativa IBGE	Estimativa y(t)	Erro relativo
2011	338545	339481	0,276%
2012	342347	344286	0,563%
2013	357402	349027	2,400%
2014	361991	353699	2,344%
2015	366491	358301	2,286%
2016	370875	362830	2,217%
2017	375142	367285	2,139%
2018	381970	371663	2,773%
2019	386923	375962	2,915%
2020	391772	380182	3,049%
2021	396526	384320	3,176%
2022	398817	388376	2,688%

Fonte: IBGE (2023); Autores (2023)

Gráfico 1 – Comparação entre as estimativas IBGE e $y(t)$ com $t_0 = 2010$



Fonte: IBGE (2023); Autores (2023)

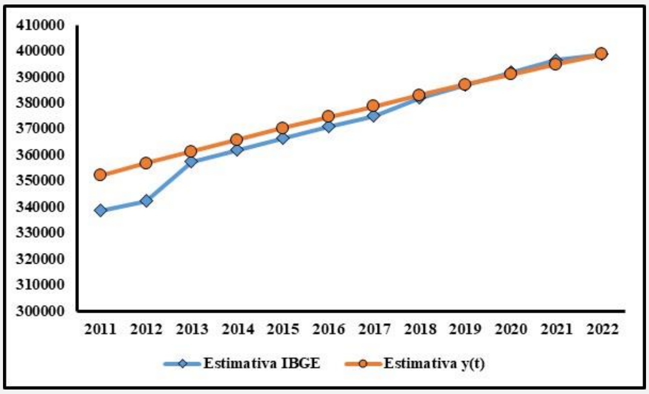
A Tabela 2 exibe a estimativa da população de Anápolis divulgada pelo IBGE, a estimativa obtida por meio da equação (17), considerando $t_0 = 2022$ e $y(t_0) = 398817$ (população de Anápolis em 2022), e o erro relativo quando comparadas as duas estimativas.

Tabela 2 – Estimativa da quantidade da população de Anápolis: $t_0 = 2022$

Ano (t)	Estimativa IBGE	Estimativa y(t)	Erro relativo
2011	338545	352190	3,874%
2012	342347	356815	4,055%
2013	357402	361368	1,097%
2014	361991	365847	1,054%
2015	366491	370250	1,015%
2016	370875	374575	0,988%
2017	375142	378821	0,971%
2018	381970	382986	0,265%
2019	386923	387069	0,038%
2020	391772	391069	0,180%
2021	396526	394985	0,390%
2022	398817	398817	0,000%

Fonte: IBGE (2023); Autores (2023)

Gráfico 2 – Comparação entre as estimativas IBGE e $y(t)$ com $t_0 = 2022$



Fonte: IBGE (2023); Autores (2023)

Observando os dados das Tabelas 1 e 2 e os Gráficos 1 e 2 conclui-se que para valores de t próximos de t_0 a estimativa $y(t)$ é mais próxima da estimativa divulgada pelo IBGE. Quando considerado $t_0 = 2010$, na equação (17), conforme Tabela 1, o erro relativo entre a estimativa $y(t)$ e a estimativa IBGE em 2011 é igual a 0,276%. Adotando $t_0 = 2022$, na equação (17), conforme Tabela 2, o erro relativo no ano de 2021 é igual a 0,390%.

Tem-se que a estimativa $y(t)$ quando $t_0 = 2022$ apresenta uma maior quantidade de erros relativos pequenos, isto é, o modelo se ajusta melhor para as estimativas dadas pelo IBGE.

Para estimar a população de Anápolis no ano de 2023 considera-se em (17) $t_0 = 2022$ obtendo assim, a população estimada $y(2023) = 402564$.

Conclusão

Considerando o desenvolvimento da equação diferencial do modelo de Verhulst, modelado utilizando os dados estatísticos apresentados pelo IBGE para a o município de Anápolis, obteve-se a equação (17) como modelo matemático para a dinâmica populacional.

Com o objetivo de estimar a população de Anápolis para 2023, utilizou-se de duas estimativas considerando $t_0 = 2010$ e $t_0 = 2022$ onde verificou-se que o segunda apresentava menores quantidades de erros relativos em comparação com as estimativas divulgadas pelo IBGE. Portanto, considerou-se a estimativa $y(t)$ com $t_0 = 2022$ para estimar a população de Anápolis para 2023. Dessa forma, conclui-se, de acordo com o modelo obtido, que a população de Anápolis em 2023 é de 402.564 habitantes.

Referências

ALITOLEF, Sérgio dos S; et. al. **História das equações diferenciais e algumas de suas aplicações**. *In:* X SeMat – Semana de matemática: a formação de professores de matemática em debate. Ji-Paraná. EDUFRO. 01 a 05 de novembro de 2010. P. 74-83.

BACAËR, N.; VIANA, J. P.; DOUTOR, P. **Breve história matemática da dinâmica populacional**. 2021.

BOYCE, William. **Equações diferenciais e problemas de valores de contorno**/ William E. Boyce, Richard C. DiPrima; tradução por Valéria de Magalhães Iorio. Rio de Janeiro: LTC. 2006.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da matemática**. São Paulo: Blucher, 2012.

CECCONELLO, Moiseis dos Santos et al. **Modelagem alternativa para dinâmica populacional: Sistemas dinâmicos fuzzy**. 2006. Dissertação de Mestrado. IMECC-UNICAMP, Campinas.

INSTITUO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA - IBGE. **Sistema IBGE de Recuperação Automática – SIDRA**. Disponível em: https://sidra.ibge.gov.br/pesquisa/pnadca/tabelas

O’CONNOR, J. J; ROBERTSON, E. F. Pierre François Verhulst: Byography. **MacTutor**. 2014. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Verhulst/>. Acesso em: 10 out. 2023.

SOUZA, Alex Rodrigo dos S.; MACHADO, Celso P.; SILVA, Cristiane da; et al. **História da Matemática**. Grupo A, 2021. E-book. ISBN 9786556902302. Disponível em: https://app.minhabiblioteca.com.br/#/books/9786556902302/. Acesso em: 04 abr. 2023.

TEIXEIRA, Fernanda Luiz. **Modelos descritos por equações diferenciais ordinárias**. 2012. 124 p. Dissertação - (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2012. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/94355>.

ZILL, Dennis G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem** – tradução da 9ª edição norte-americana / Dennis G. Zill; tradução Cyro de Carvalho Patarra, Heitor Honda Federico; revisão técnica Luiza Maria Oliveira da Silva. 2ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.