

## **ESTUDO DO REFINAMENTO DE MALHAS DE ELEMENTOS FINITOS COM ELEMENTO FINITO Q4-ISOPARAMÉTRICO LINEAR**

### **STUDY OF FINITE ELEMENT MESH REFINEMENT WITH LINEAR FINITE ELEMENT Q4-ISOPARAMETRIC**

78

**CÁSSIA CAROLINA SANTOS CARNEIRO**

Engenheira e Pesquisadora IFGoiano - Campus de Rio Verde (GO)  
cassiacarolina05@gmail.com

**MARCEL WILLIAN REIS SALES**

Docente e Pesquisador IFGoiano - Campus de Rio Verde (GO)  
marcel.engcivil@hotmail.com

**MICHELL MACEDO ALVES**

Docente e Pesquisador IFGoiano - Campus de Rio Verde (GO)  
michell.macedo@ifgoiano.edu.br

**JOSÉ DE SOUZA SALES**

Docente e Pesquisador da Universidade Estadual de Goiás - CET Anápolis (GO)  
jose.sales@ueg.br

**GABRIEL HIBLER SILVA**

Mestrando IFGoiano - Campus de Rio Verde (GO)  
gabriel.hbler@gmail.com

**Resumo:** Este artigo tem como foco mostrar o refinamento de malha do método dos elementos finitos (MEF) usando o elemento Q4 – Isoparamétrico. Assim, foi utilizado o programa Método dos Elementos Finitos, dividido em 5 funções, sendo, função de leitura da estrutura, função de graus de liberdade da estrutura toda, criação da matriz de rigidez da estrutura, função para montagem do vetor de forças externas da estrutura e função para determinação de deslocamentos nodais. Em seguida, realizou-se o refinamento de forma gradual, no qual, o valor do deslocamento foi calculado através do MEF e comparado com sua solução analítica, quando possível. Como resultado, observando os três casos estudados, viga, pórtico e torus 2D, mostra que quanto melhor for o refinamento da malha, em termos de quantidade e principalmente do posicionamento dos elementos finitos na malha, mais o valor do deslocamento se aproxima da solução exata. Dessa maneira, com o MEF, apesar de ter uma porcentagem de erro, pode-se obter resultados bem próximos da solução exata.

**Palavras-chave:** Deslocamento. Discretização. Análise Numérica.

**Abstract:** This article focused on showing the mesh refinement of finite element methods (FEM) using the Q4 – Isoparametric element. Thus, the program Finite Element Method, divided into 5 functions, being, function of reading the structure, function of degrees of freedom of the whole structure, creation of the matrix of rigidity of the structure, function for assembling the vector of external forces of the structure and function for the determination of nodal displacements. Then, the refinement was carried out

gradually, in which the displacement value was calculated using the FEM and compared with its analytical solution, when possible. As a result, observing the three cases studied, beam, frame and 2D torus, shows that the better the mesh refinement, in terms of quantity and especially the positioning of finite elements in the mesh, the closer the displacement value is to the exact solution. In this way, it is expected that with the FEM, despite having an error percentage, it is possible to obtain results very close to the exact solution.

**Keywords:** Displacement. Discretization. Numerical Analysis.

## Introdução

Engenheiros e projetistas são frequentemente desafiados a resolver uma variedade de problemas, dos mais simples aos mais complexos. É de responsabilidade do profissional, principalmente na área de cálculos estruturais, utilizar todos os equipamentos matemáticos, teóricos e práticos necessários para garantir o sucesso da análise e prevenir possíveis falhas no projeto (ALVES FILHO, 2013).

Para os engenheiros desenvolverem com sucesso o cálculo estrutural, eles precisam ter conhecimento de tudo o que envolve a análise, ou seja, parte matemática (equações diferenciais), parte teórica (resistência do material, teoria da elasticidade, etc.), inclusive, que entendam o comportamento das estruturas. Em geral, soluções exatas para os problemas mais simples podem ser obtidas por métodos analíticos clássicos, porém, a maioria dos casos requer métodos mais sofisticados (BUDYNAS; MISCHKE; SHIGLEY, 2005).

É aí que entra o Método dos Elementos Finitos ou MEF, que pode gerar resultados aproximados de tensão, deslocamento e deformação estrutural, levando a uma aplicação mais ampla na engenharia e produzindo resultados satisfatórios (ALVES FILHO, 2013).

A ideia básica do MEF é subdividir o domínio a ser analisado (contínuo) em subdomínios de dimensões finitas, chamados elementos, conectados entre si em pontos chamados nós (ALVES, 2007). Cada elemento exibe as mesmas propriedades de um meio contínuo e é analisado separadamente, e seus resultados são combinados para obter um resultado de domínio global.

Este método pode ser muito preciso, dependendo das dimensões do domínio e do número de nós e elementos. Quanto menor o tamanho do domínio e quanto maior o

número de elementos que ele subdivide, mais preciso será o resultado. Além disso, existe um conceito muito importante sobre graus de liberdade, que se refere a possíveis movimentos translacionais e rotacionais relativos a um ponto ou corpo rígido. O número de graus de liberdade em cada nó afeta o comportamento de cada elemento (SOUZA, 2003).

É importante notar que o método de elementos finitos fornece soluções aproximadas usando equações polinomiais simples, geralmente lineares, quando mais quadráticas, dentro de cada elemento (subdomínio).

A precisão dessa aproximação é dada diretamente pela proporção de seus elementos, quanto maior o elemento, maior o erro de correlação, portanto, quanto menor o elemento e, portanto, quanto maior o número de elementos (subcampos), mais próximo do resultado analítico, atingirá sua aproximação, convergindo assim para a solução exata (BORGES; MADONA, 2019).

Malhas de elementos finitos são processadas em uma variedade de aplicações usando o método de elementos finitos, uma técnica amplamente utilizada para resolver computacionalmente equações diferenciais parciais (HUGHES, 2012). A grade corresponde à discretização geométrica do domínio, subdividindo-o em pequenas partes, denominadas elementos, que representam um domínio contínuo do problema de interesse. Devido à repetida necessidade de resultados mais precisos, grades mais finas, ou seja, grades com maior discretização espacial, são essenciais. No entanto, o processamento dessas grades no tempo requer o uso de técnicas de otimização na definição da estrutura de armazenamento e dos algoritmos que nela operam. Diante desse contexto, este artigo trata do refinamento de malha de MEF usando o elemento Q4 – Isoparamétrico.

## Referencial teórico

- **Método dos elementos finitos**

Para Moraes (2015), o MEF baseia-se na discretização de domínios, que podem ter geometrias irregulares arbitrárias, resultando em elementos polinomiais elementares cujo comportamento aproximado da estrutura pode ser alcançado resolvendo aproximações em seus nós, como um todo.

Para representar a deformação da estrutura, o MEF é baseado no método Rayleigh Ritz. Segundo Assan (1996), o método determina expressões conhecidas para representar a forma deformada da estrutura. Geralmente são funções polinomiais ou trigonométricas chamadas aproximações de deslocamento ou funções de forma.

Então, se tratando de uma estrutura mais complexa, é necessário fazer uma discretização maior dessa estrutura para obter resultados mais realistas, no entanto, é mais demorado a resolução do problema.

Segundo Moraes (2015), ao utilizar o método dos elementos finitos, sempre que possível, dependendo da natureza dos elementos, uma solução aproximada satisfatória deve ser alcançada com o menor número de elementos possível. Isso deve ser feito para economizar recursos computacionais e ainda obter resultados realistas. Por esta razão, estudos de convergência de malhas são essenciais para análise com MEF.

#### • Técnicas de alto desempenho voltadas ao método de elementos finitos

Com o método dos elementos finitos (MEF), vários problemas físicos de interesse modelados por equações diferenciais parciais podem ser resolvidos. Como em qualquer método numérico, a precisão do MEF também está relacionada à resolução da malha usada na discretização do domínio real. (SILVA; CAMATA, 2021).

Em aplicações típicas de elementos finitos, percorrer uma lista de elementos para montar um sistema de equações algébricas e suas soluções subsequentes é a operação mais comum. Essas etapas precisam ser otimizadas. Em malhas com alta resolução espacial, o uso do poder dos supercomputadores e o desenvolvimento de algoritmos paralelos escaláveis tornaram-se necessários para manter os tempos de execução dos métodos em níveis razoáveis. Nesse sentido, devem ser consideradas as

técnicas de computação de alto desempenho que empregam abordagens destinadas a melhorar a localidade de dados dentro de hierarquias de memória e processamento em sistemas multithread e distribuídos (SILVA; CAMATA, 2021).

## **Materiais e métodos**

### **• Geometrias**

Neste artigo foi feito o estudo com 03 elementos estruturais com diferentes geometrias, sendo eles: viga, pórtico e torus 2D. Todas as geometrias foram consideradas compostas por concreto, portanto os valores do módulo de elasticidade (E), coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) e coeficiente de dilatação linear ( $\alpha$ ) foram, respectivamente,  $E= 200000$  Mpa,  $\nu= 0,2$  e  $\alpha= 0,00010/^\circ\text{C}$ . Todo o refinamento das malhas está demonstrado no Apêndice A.

### **• Geometria da viga**

A primeira geometria estudada foi a viga de concreto com comprimento de 1000 mm, altura de 200 mm e largura de 50 mm. Esta viga possui travamento de dois apoios de segundo gênero, cujas coordenadas são (0.0;0.0) – nó 2 e (0.0;200) – nó 1. Além disso, na extremidade da viga, está aplicada uma força na direção Y de 10000 N, na coordenada (1000;200) – nó 4 como mostrado na figura 1. O valor de deslocamento será retirado na extremidade oposta à força aplicada, ou seja, na coordenada (1000;0.0) – nó 3.

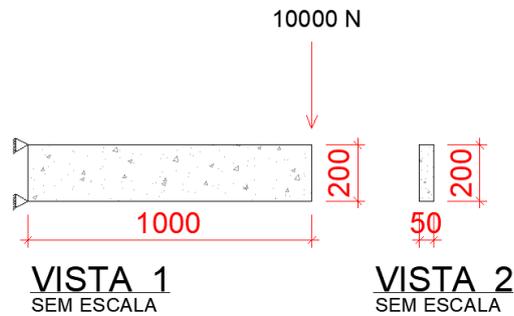


Figura 1- Geometria do elemento viga  
Fonte: Autoria própria.

### • Geometria do pórtico

O elemento pórtico apresenta as seguintes dimensões: comprimento de 2000 mm, altura de 2000 mm e largura de 500 mm. Possui travamento de 4 apoios de 2 gênero cujas coordenadas são (0.0;0.0) – nó 1, (200;0.0) – nó 2, (1800;0.0) – nó 15 e (2000;0.0) – nó 16. Por fim, no canto superior esquerdo está aplicada uma força de 10000 N na direção X, coordenada (0.0;1900) – nó 5, como é mostrado na figura 2. O valor de deslocamento será retirado na extremidade oposta à força aplicada, ou seja, na coordenada (2000;1900) – nó 12.

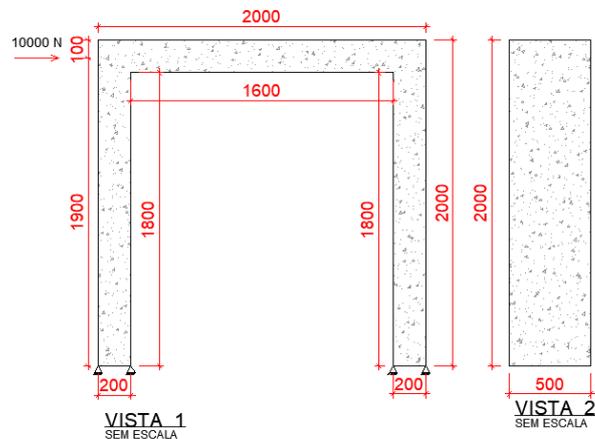


Figura 2 - Geometria do elemento pórtico  
Fonte: Autoria própria

### • Geometria do torus 2d

O elemento torus 2D apresenta as seguintes dimensões: diâmetro externo de 1600 mm, diâmetro interno de 800 mm e largura de 200 mm. Possui travamento de 3 apoios de 2 gênero, cujas coordenadas são (0.0;800) – nó 8, (235;235) – nó 7 e (235;1370) – nó 1 e uma força de 10000 N aplicada na direção Y na coordenada (1360;1360) – nó 3, conforme figura 3. O valor de deslocamento será retirado na extremidade oposta à força aplicada, ou seja, na coordenada (1360;235) – nó 5.

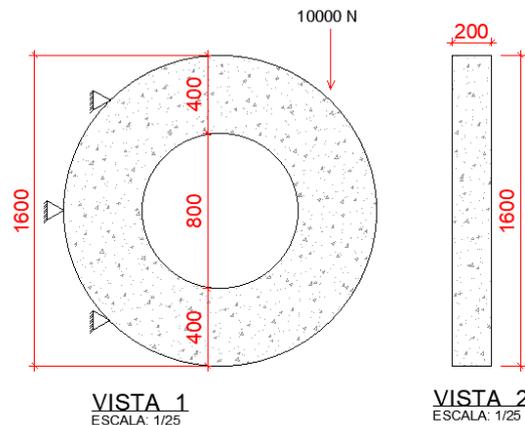


Figura 3- Geometria do elemento pórtico torus 2D  
Fonte: Autoria própria

### • Programa

Para o estudo deste artigo, foi utilizado o programa Método dos Elementos Finitos. Este programa é dividido em cinco funções principais (figura 4), são elas: função de leitura da estrutura (L.D.), função de graus de liberdade da estrutura toda (G.D.L.), criação da matriz de rigidez da estrutura, função para montagem do vetor de forças externas da estrutura e função para determinação de deslocamentos nodais.

Na primeira função é feita toda a entrada de dados da estrutura, ou seja, é feita a definição das propriedades básicas do elemento, definição do tipo de estrutura, quantidade de nós, coordenadas dos nós, propriedades do material (módulo de

elasticidade, coeficiente de Poisson e valor de  $\alpha$ ), condições de contorno e forças externas.

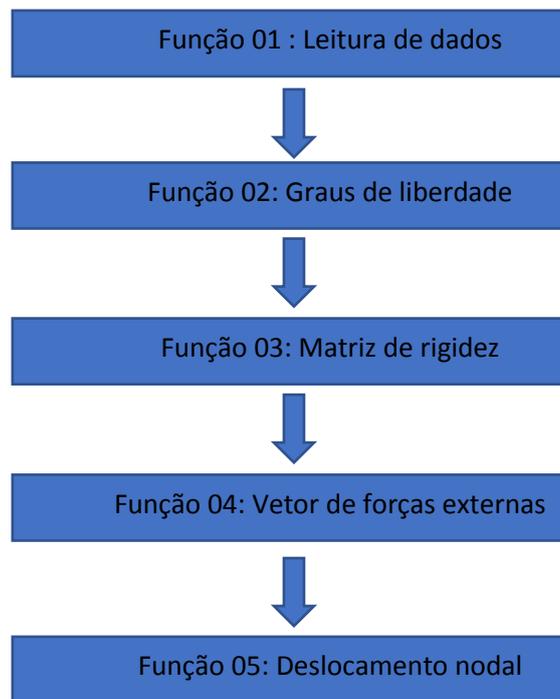


Figura 4- Fluxograma das funções do programa  
Fonte: Autoria própria

Na segunda função ocorre a definição dos graus de liberdade da estrutura, onde utiliza a matriz de restrições de apoio, para definir quantos graus de liberdade existem na estrutura e quais os nos devem estar restringidos, dessa forma, calcula quantas equações terá o cálculo.

Na terceira função é criada a matriz de rigidez sem as restrições, de acordo com o número de equações descobertas na função de definição dos graus de liberdade e com os dados fornecidos na entrada de dados.

Na quarta função é definida a montagem do vetor de forças externas da estrutura baseado nas informações obtidas nos três passos anteriores. Por fim, na quinta função, encontra-se o vetor deslocamento nodal através da multiplicação da inversão da matriz da rigidez pelo vetor de forças. O programa pode ser encontrado no seguinte endereço: <https://github.com/marcelwillianreis/Programa-MEF-python-estruturado>.

### • Análise de deslocamento a partir do refinamento de malhas

A análise do deslocamento consiste basicamente em calcular os valores dos deslocamentos resultantes da força aplicada em cada um dos elementos estruturais e comparar esses resultados com os valores analíticos da viga e do pórtico. No caso da torus 2D, não existe equação analítica para cálculo do deslocamento, portanto comparou-se os deslocamentos entre si.

Inicialmente foi feito o refinamento da malha, ou seja, as geometrias foram divididas em elementos menores, no caso deste artigo, em vários elementos isoparamétricos Q4.

O refinamento de todas as geometrias foi feito de forma gradual, ou seja, iniciou-se com a divisão do sólido em poucos elementos e aumentou-se o número de elementos de acordo com a necessidade. Este refinamento pode ser melhor analisado no fim do artigo, no APÊNDICE A.

No caso da viga e do pórtico, o refinamento foi feito de forma gradual, portanto a cada refinamento, o valor do deslocamento foi calculado através do método dos elementos finitos e comparado com o valor analítico, de forma que foi possível encontrar um valor de erro com a diferença entre esses dois valores. Sendo assim, para provar que a eficiência do método de estudo neste artigo, a ideia foi que o refinamento da malha fosse feito até atingir um valor de erro menor que 5%.

Já no caso da torus 2D, como citado anteriormente, não existe um valor analítico para que seja comparado com os valores de deslocamento encontrados através do método dos elementos finitos, portanto, o refinamento foi feito também de forma gradual, porém a comparação foi entre os valores de deslocamento retirados do mesmo programa, a fim de encontrar um valor de erro menor que 5% e para confirmar o funcionamento do código utilizado até aqui.

## Resultados e discussão

### • Elemento viga

No Apêndice A é possível ver todo o refinamento que foi feito na viga para o cálculo do deslocamento vertical, conforme figura 1. No total foram feitos onze refinamentos diferentes de forma gradual. Os resultados podem ser vistos No quadro 1. O referencial analítico foi de 0,5 mm.

Quadro 1- Resultados elemento viga

Referência (analítico) (mm)			
0,5			
MODELO 1 - VIGA			
Quantidade de elementos	Deslocamento via MEF (mm)	Erro (mm)	Erro (%)
1	0,044	0,455	91,08%
2	0,140	0,360	71,95%
3	0,234	0,265	53,06%
4	0,302	0,198	39,57%
5	0,350	0,149	29,86%
6	0,384	0,116	23,22%
7	0,407	0,092	18,49%
8	0,424	0,075	15,09%
10	0,446	0,054	10,76%
15	0,480	0,020	4,06%

Fonte: Autoria própria

Nos resultados obtidos através do método dos elementos finitos é possível observar que ao aumentar o refinamento da malha, ou seja, aumentar o número de elementos isoparamétricos Q4 o deslocamento vai se aproximando do valor analítico. No gráfico número de elementos x deslocamento é possível enxergar melhor esta situação (figura 5).

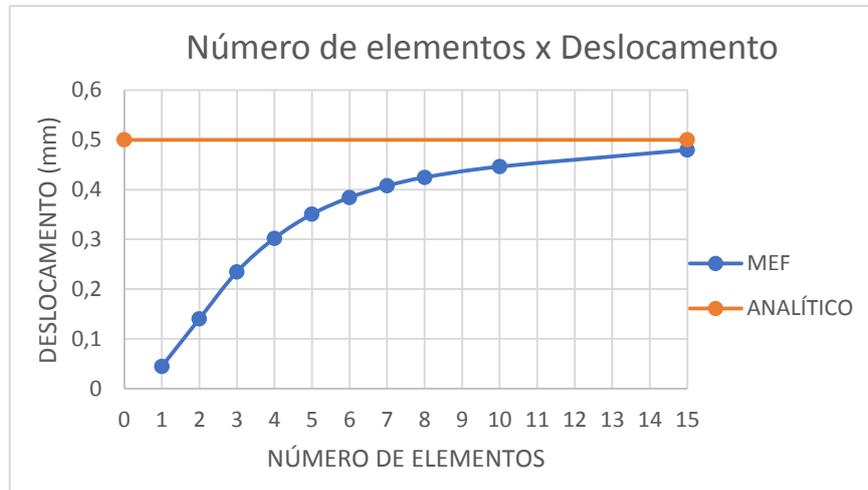


Figura 5- Número de elementos x deslocamento do elemento viga  
Fonte: Autoria própria

Já no gráfico Número de elementos x erro, pode-se observar que com o aumento do número de elementos, ou seja, com o aumento do refinamento da malha, a porcentagem do erro diminui e segue gradativamente se aproximando de zero (figura 6).

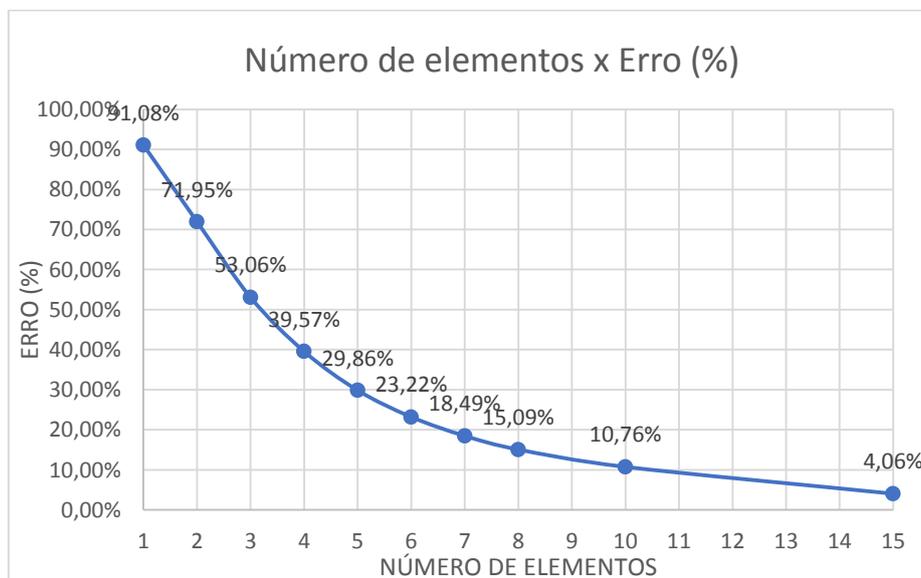


Figura 6- Número de elementos x erro do elemento viga  
Fonte: Autoria própria

Neste caso específico, o refinamento das malhas foi encerrado com 15 elementos e 32 nós, onde o deslocamento encontrado foi de 0,47968543 e o erro de

4,06%. Considerando que o erro aceitável neste estudo é de 5%, considera-se que o gráfico convergiu.

É possível observar no refinamento das malhas da viga que ela foi dividida apenas em elementos na direção vertical. Porém também foi feito um estudo com divisões na horizontal como mostrado na figura 7.

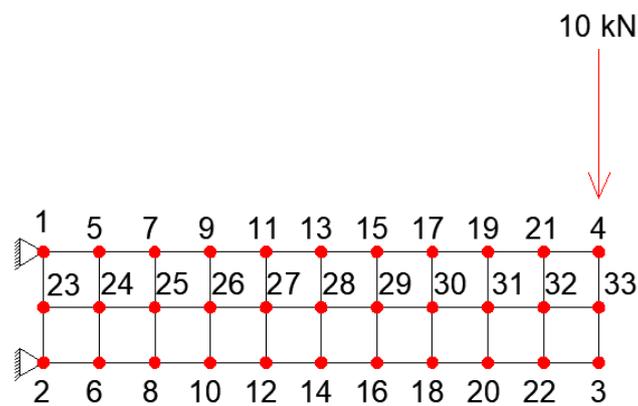


Figura 7- Refinamento do elemento viga com 20 elementos  
Fonte: Autoria própria

Com esse modelo de refinamento, foi possível observar que mesmo aumentando 5 elementos comparado com o último modelo que utilizamos, que atingiu 4,06%, neste caso, por conta da forma que foi feito o refinamento dessa malha, o deslocamento encontrado não foi satisfatório, porque não atingiu os 5% considerados aceitáveis para este estudo. Portanto, é visto que além de aumentar o número de elementos é necessário observar de que forma os mesmos ficarão dispostos na malha.

#### • Elemento pórtico

No Apêndice A é possível ver todo o refinamento que foi feito no elemento pórtico para o cálculo do deslocamento vertical, conforme figura 2. No total foram feitos sete refinamentos diferentes de forma gradual. Os resultados podem ser vistos no quadro 2. O referencial analítico foi de 0,06212 mm.

Quadro 2- Resultados elemento pórtico

Referência (analítico) (mm)			
0,06212			
MODELO 2 - PÓRTICO			
Quantidade de elementos	Deslocamento via MEF (mm)	Erro (mm)	Erro (%)
8	0,0029	0,0593	95,38%
14	0,0129	0,0492	79,21%
24	0,0283	0,0338	54,47%
44	0,0439	0,0182	29,34%
84	0,0598	0,0023	3,69%

Fonte: Autoria própria

Nos resultados obtidos através do método dos elementos finitos é possível observar que ao aumentar o refinamento da malha, ou seja, aumentar o número de elementos isoparamétricos Q4 o deslocamento vai se aproximando do valor analítico.

No gráfico número de elementos x deslocamento nota-se que o valor do deslocamento através do método dos elementos finitos vai se aproximando do valor analítico de acordo com o aumento e posicionamento dos elementos no refinamento da malha (figura 8).

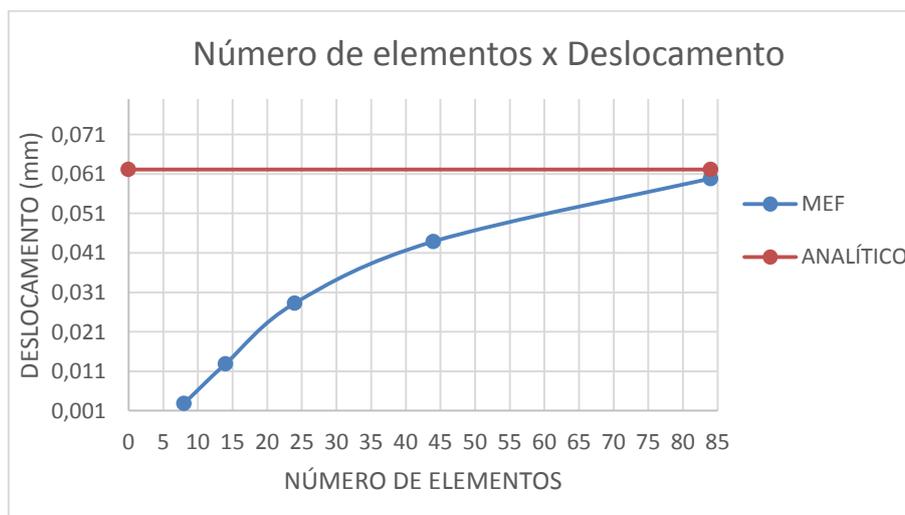


Figura 8- Número de elementos x deslocamento do elemento pórtico  
Fonte: Autoria própria

Já no gráfico Número de elementos x erro, pode-se observar que com o aumento do número de elementos, ou seja, com o aumento e posicionamento do refinamento da malha, a porcentagem do erro diminui e segue gradativamente se aproximando de zero (figura 9).

91

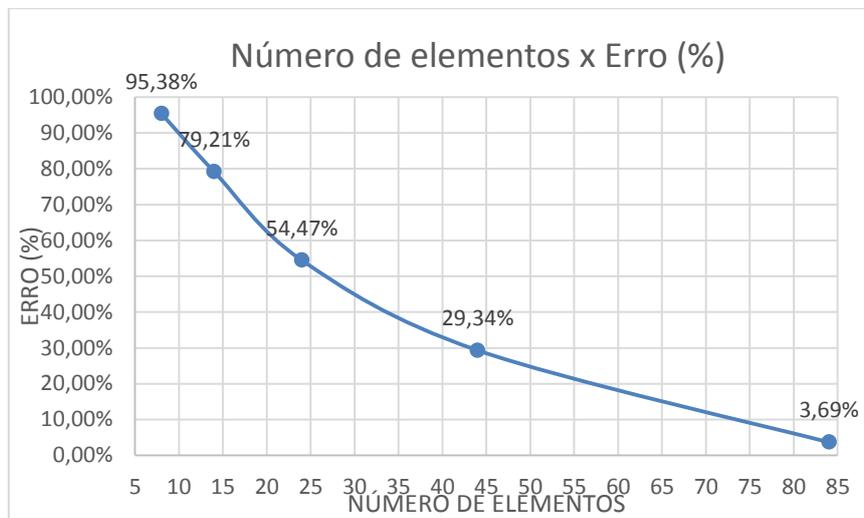


Figura 9- Número de elementos x erro do elemento pórtico  
Fonte: Autoria própria

Neste caso específico, o refinamento das malhas foi encerrado com 84 elementos e 155 nós, onde o deslocamento encontrado foi de 0,05982548 e o erro de 3,69 %. Considerando que o erro aceitável neste estudo é de 5%, considera-se que o gráfico convergiu.

#### • Elemento torus 2D

No Apêndice A é possível ver todo o refinamento que foi feito no elemento pórtico para o cálculo do deslocamento vertical, conforme figura 3. No total foram feitos sete refinamentos diferentes de forma gradual.

No caso da Torus 2D, não existe uma solução analítica para comparar o resultado, então para encontrar o erro, comparou-se o deslocamento com o valor do deslocamento anterior. Portanto, no primeiro refinamento, com 8 elementos, não foi

possível obter um valor de erro por não ter outro valor para realizar a comparação. Os resultados podem ser vistos no quadro 3.

Quadro 3- Resultados elemento torus 2D

MODELO 3 - TORUS 2D			
Quantidade de elementos	Deslocamento via MEF (mm)	Erro (mm)	Erro (%)
8	0,0025	-	-
16	0,0035	0,00092	36,39%
32	0,0037	0,00022	6,47%
64	0,0039	0,00017	4,74%

Fonte: Autoria própria.

Nos resultados obtidos através do método dos elementos finitos é possível observar também que com o aumento do refinamento das malhas, o valor de erro vai diminuindo e se aproximando de 0. Pode-se observar melhor a situação nos gráficos números de elementos x deslocamento e número de elementos x erro, como mostrado nas figuras 10 e 11.

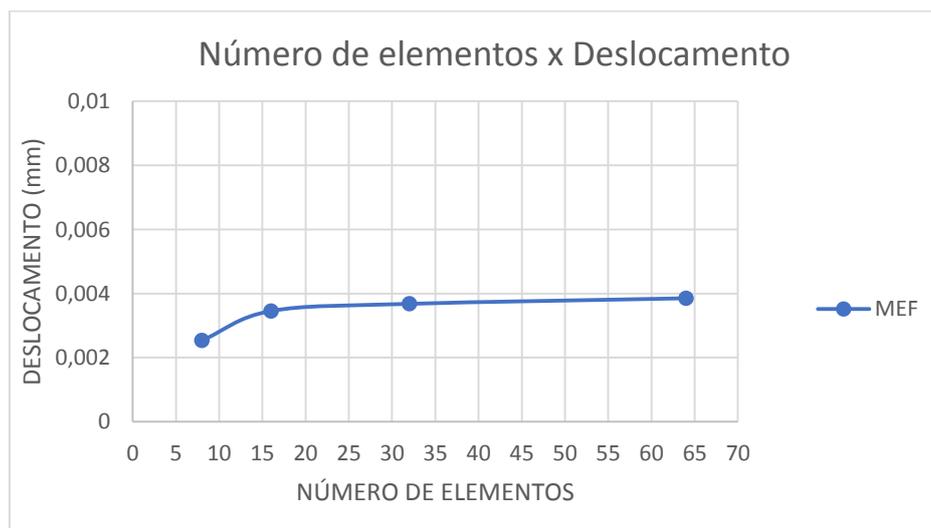


Figura 10- Número de elementos x deslocamento do elemento torus 2D

Fonte: Autoria própria

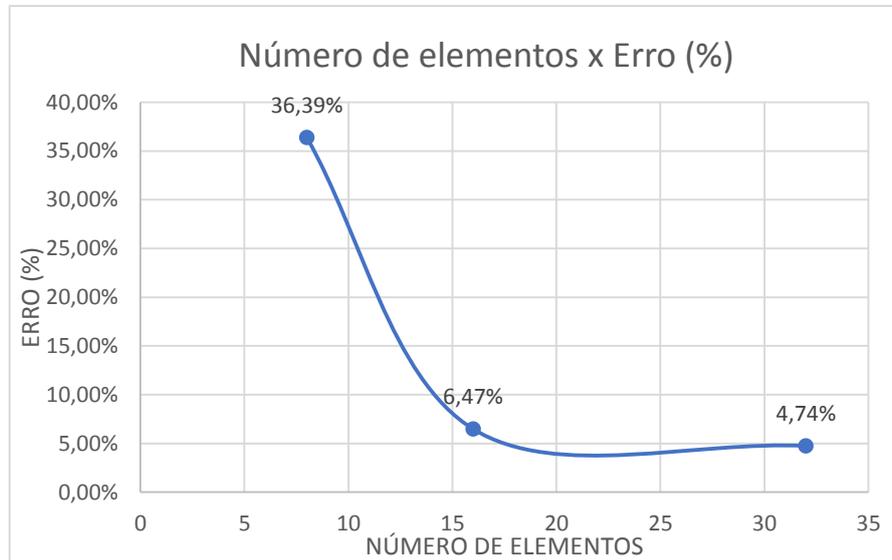


Figura 11- Número de elementos x erro do elemento torus 2D  
Fonte: Autoria própria

## Conclusão

Ao se observar os três casos, viga, pórtico e torus 2D, conclui-se, no método de elementos finitos, que com o aumento do refinamento da malha, o valor do deslocamento se aproxima do valor analítico, ou seja, quanto mais refinada a malha está, mais próximo da solução analítica será o valor de deslocamento. Porém, não significa que a quantidade de elementos finitos seja o primordial. Outro fator importante para a eficiência do resultado é o posicionamento dos elementos finitos na malha refinada. Isso ocorre, pois quando é feita a divisão de um elemento estrutural em elementos menores, no cálculo de deslocamento, por exemplo, é feito o comportamento de cada elemento finito para só então obter o resultado do elemento como um todo. Nos casos dos elementos estudados neste artigo, por exemplo, os resultados de deslocamento foram mais satisfatórios ao refinar a malha com os elementos seu maior lado contrário ao maior lado do elemento como um todo.

O programa Método dos Elementos Finitos, com linguagem Python utilizado neste artigo, ocasionou a obtenção de resultados satisfatórios para a pesquisa, porém

ainda é necessário realizar mais estudos por conta da dificuldade de conversão encontrada em alguns casos estudados.

Por fim, conclui-se que o método dos elementos finitos é de grande valia para o cálculo de estruturas como um todo, pois não existem soluções analíticas para todas as equações que podem ser criadas, então com o método dos elementos finitos, apesar de ter uma porcentagem de erro, pode-se obter resultados bem próximos do resultado exato.

### Agradecimentos

Agradecemos ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano - Campus Rio, à Universidade Estadual de Goiás, à Universidade Federal de Catalão e à Universidade Federal de Goiás pelo apoio destinado a realização deste trabalho.

### Referências

ALVES, L. M. **Métodos dos Elementos Finitos**. 2007. 438 f. Tese (Doutorado em Métodos Numéricos) – Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal do Paraná, Curitiba. 2007. Disponível em:  
<[https://www.academia.edu/15457512/M%C3%A9todo\\_dos\\_Elementos\\_Finitos](https://www.academia.edu/15457512/M%C3%A9todo_dos_Elementos_Finitos)>.  
Acesso em: 29 mar. 2022.

ASSAN, A. E. **Métodos energéticos e análise estrutural**. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 1996.

AVELINO FILHO, A. **Elementos finitos - a base da tecnologia CAE**. 6a. ed. São Paulo: Érica, 2013.

BORGES, D. G; MADONA, E. F. **Aplicação do método dos elementos finitos em problemas de vigas considerando as teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko**. 71f. Trabalho de Conclusão (Engenharia Civil) – Universidade de Taubaté. Taubaté. 2019.

BUDYNAS, R. G.; MISCHKE, C. R.; SHIGLEY, J. E. **Projeto de engenharia mecânica**. 7a. ed. Porto Alegre: Bookman, 2005.

HUGHES, T. J. (2012). **The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis**. Courier Corporation.

MORAES, A. J. O Método dos Elementos Finitos e a Engenharia Civil. **Revista Especialize On-line Ipog**, Goiânia, v. 01, n. 10, dez. 2015.

SILVA, G. M. F; CAMATA, J, J. **MeshTools: uma ferramenta de manipulação de malhas de elementos finitos com foco em alto desempenho.** DOI: 10.5753/wscad.2021.18508. 2021.

SOUZA, R. M. **O Método dos elementos finitos aplicado ao problema de condução de calor.** Belém. Maio 2003. 39 f. Disponível em:

<[https://www.researchgate.net/publication/326331671\\_O\\_Metodo\\_dos\\_Elementos\\_Finitos\\_A](https://www.researchgate.net/publication/326331671_O_Metodo_dos_Elementos_Finitos_Aplicado_ao_Problema_de_Conducao_de_Calor)

plicado\_ao\_Problema\_de\_Conducao\_de\_Calor>. Acesso em: 5 jun. 2019.

## ÂPENDICE A

### 1. Refinamento das malhas do elemento viga com 1 elemento.

- 4 nós;
- 1 elemento.

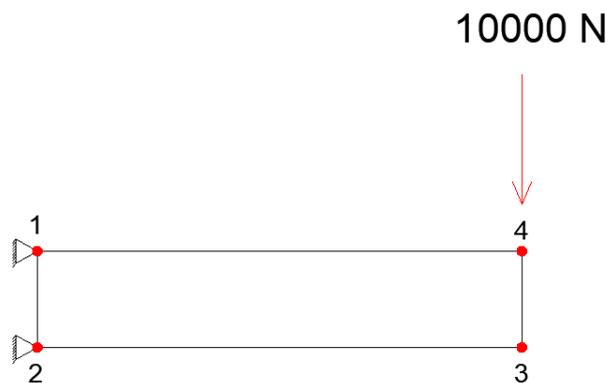


Figura 12: refinamento viga com 1 elemento  
Fonte: autoria própria

### 2. Refinamento das malhas do elemento viga com 2 elementos.

- 6 nós;
- 2 elementos.

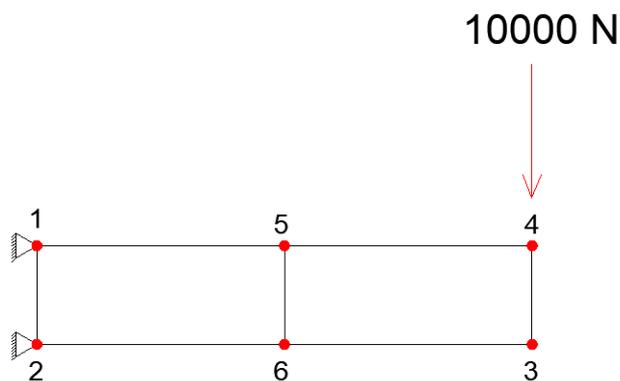


Figura 13: Refinamento viga com 2 elementos  
Fonte: Autoria própria

3. Refinamento das malhas do elemento viga com 3 elementos.

- 8 nós;
- 3 elementos.

97

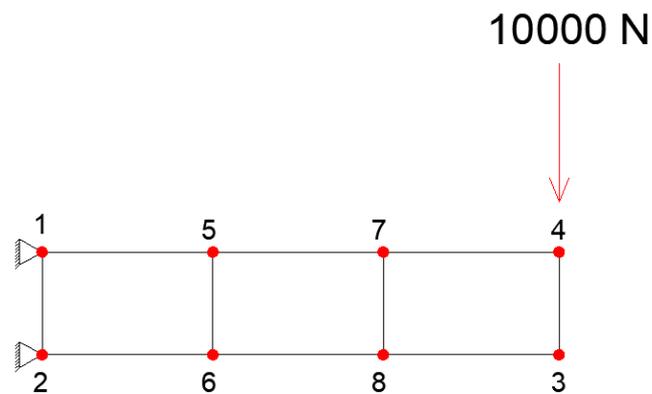


Figura 14: Refinamento viga com 3 elementos  
Fonte: Autoria própria

4. Refinamento das malhas do elemento viga com 4 elementos.

- 10 nós;
- 4 elementos.

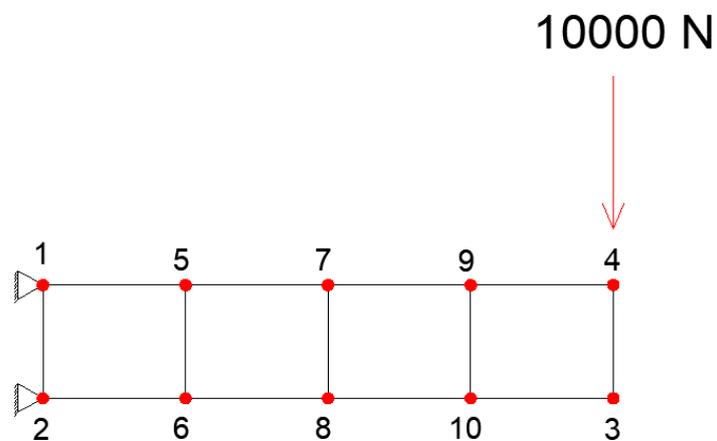


Figura 15: Refinamento viga com 4 elementos  
Fonte: Autoria própria

5. Refinamento das malhas do elemento viga com 5 elementos.

- 12 nós;
- 5 elementos.

98

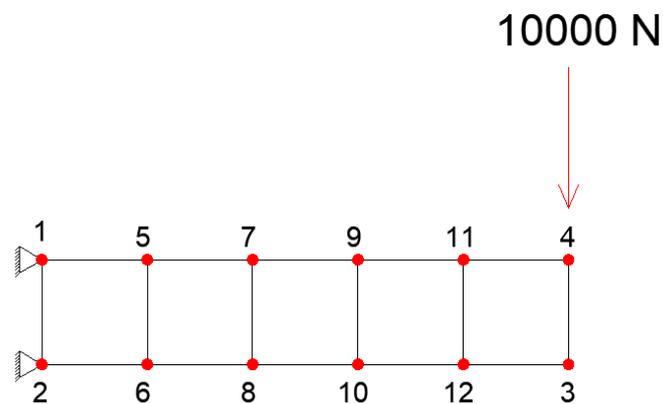


Figura 16: Refinamento viga com 5 elementos  
Fonte: Autoria própria

6. Refinamento das malhas do elemento viga com 6 elementos.

- 14 nós;
- 6 elementos.

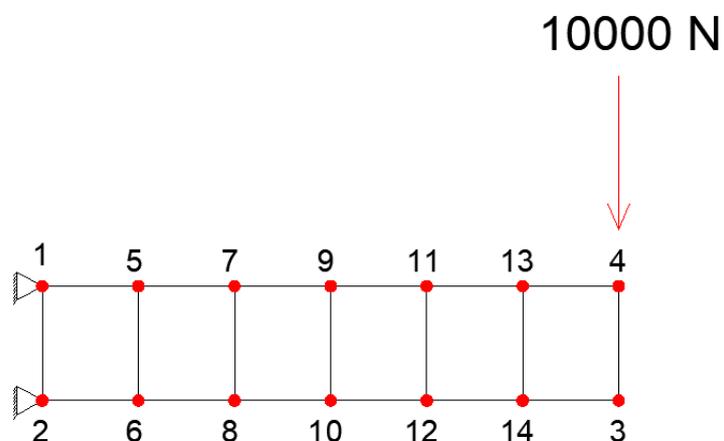


Figura 17: Refinamento viga com 6 elementos  
Fonte: Autoria própria

7. Refinamento das malhas do elemento viga com 7 elementos.

- 16 nós;
- 7 elementos.

99

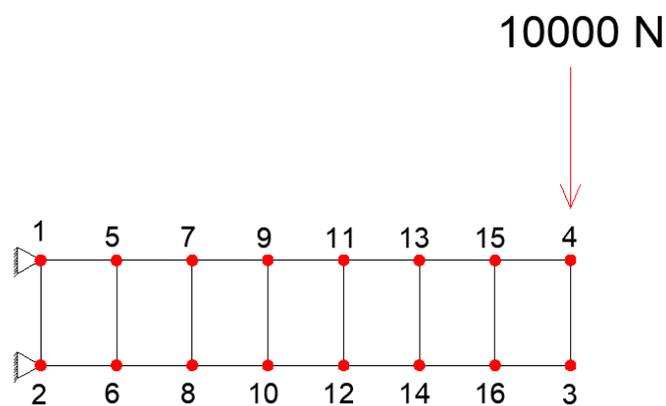


Figura 18: Refinamento viga com 7 elementos  
Fonte: Autoria própria

8. Refinamento das malhas do elemento viga com 8 elementos.

- 18 nós;
- 8 elementos.

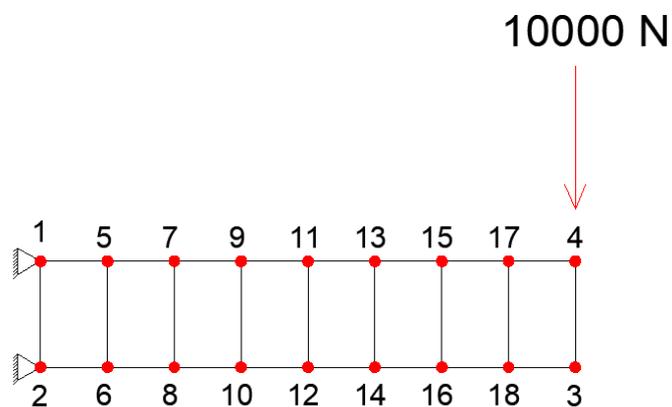


Figura 19: Refinamento viga com 8 elementos  
Fonte: Autoria própria

9. Refinamento das malhas do elemento viga com 10 elementos.

- 22 nós;
- 10 elementos.

100

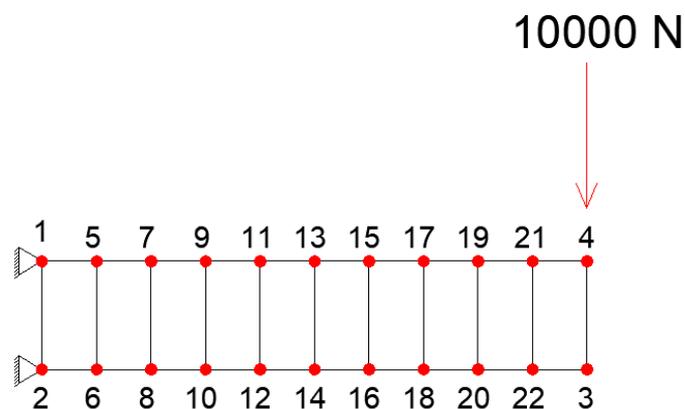


Figura 20: Refinamento viga com 10 elementos  
Fonte: Autoria própria

10. Refinamento das malhas do elemento viga com 15 elementos.

- 32 nós;
- 15 elementos.

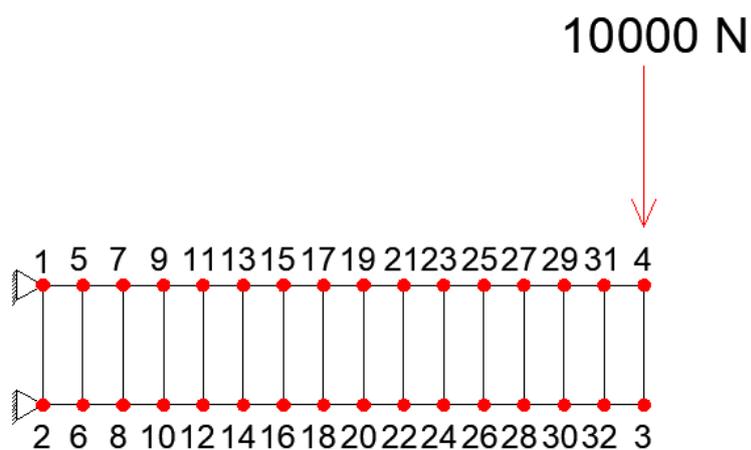


Figura 21: Refinamento viga com 15 elementos  
Fonte: Autoria própria

11. Refinamento das malhas do elemento pórtico com 8 elementos.

- 16 nós;
- 8 elementos.

101

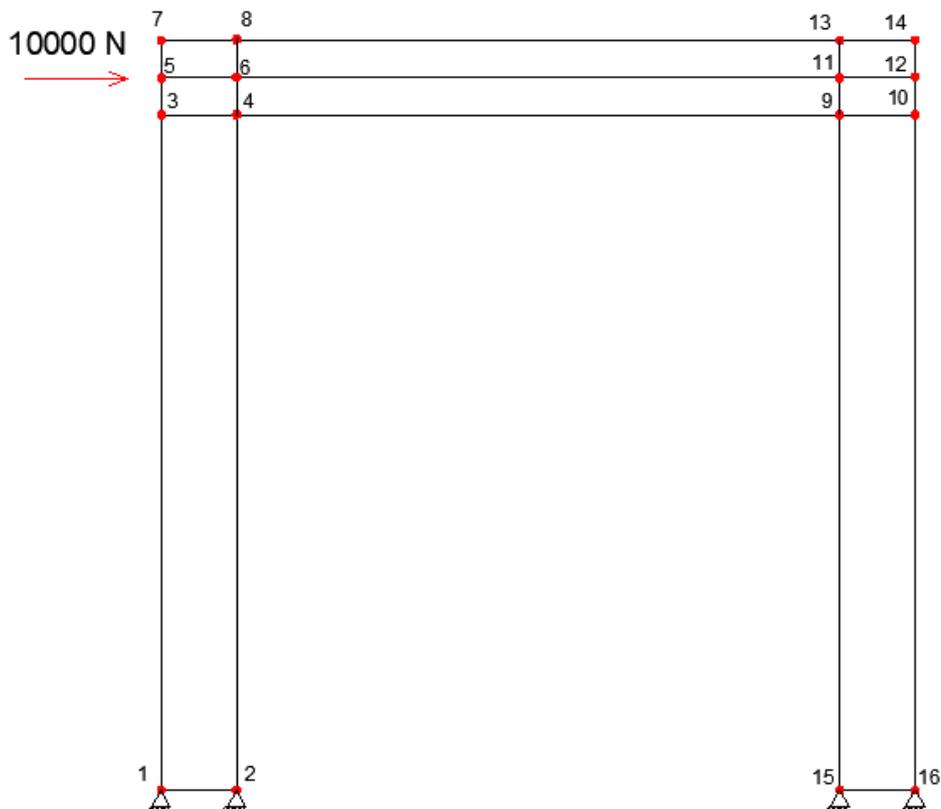


Figura 22: Refinamento pórtico com 8 elementos

Fonte: Autoria própria

12. Refinamento das malhas do elemento pórtico com 14 elementos.

- 22 nós;
- 14 elementos.

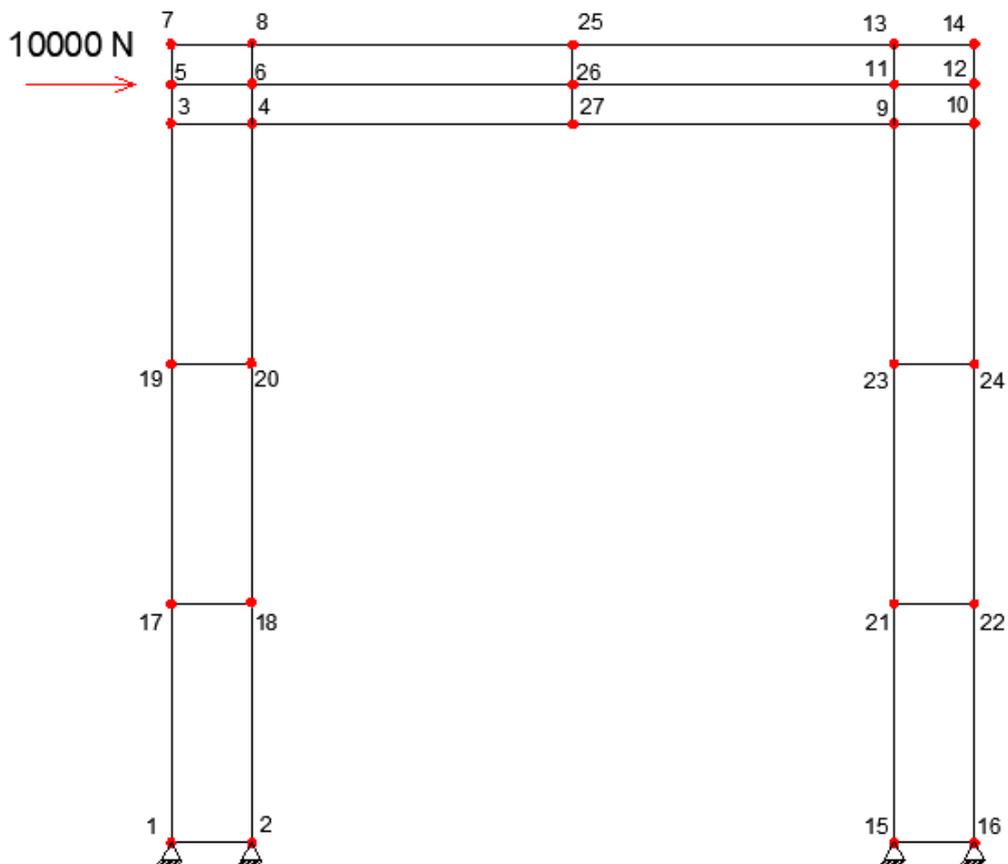


Figura 23: Refinamento pórtico com 14 elementos  
Fonte: Autoria própria

### 13. Refinamento das malhas do elemento pórtico com 24 elementos.

- 45 nós;
- 24 elementos.

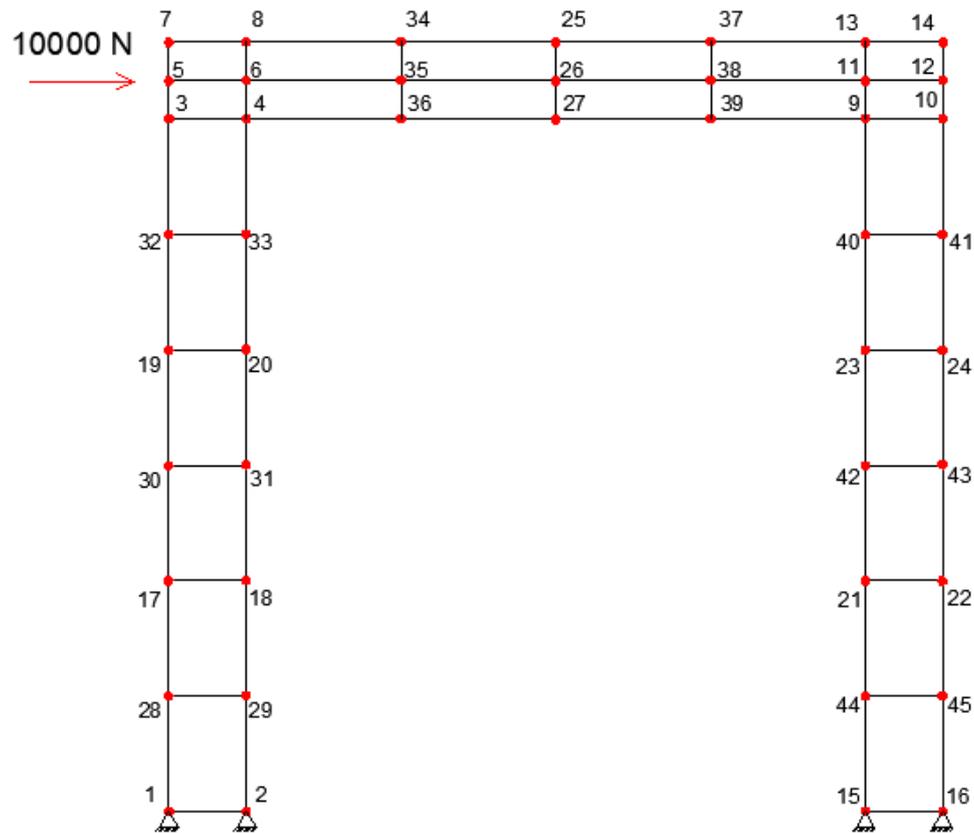


Figura 24: Refinamento pórtico com 24 elementos  
Fonte: Autoria própria

#### 14. Refinamento das malhas do elemento pórtico com 56 elementos.

- 105 nós;
- 56 elementos.

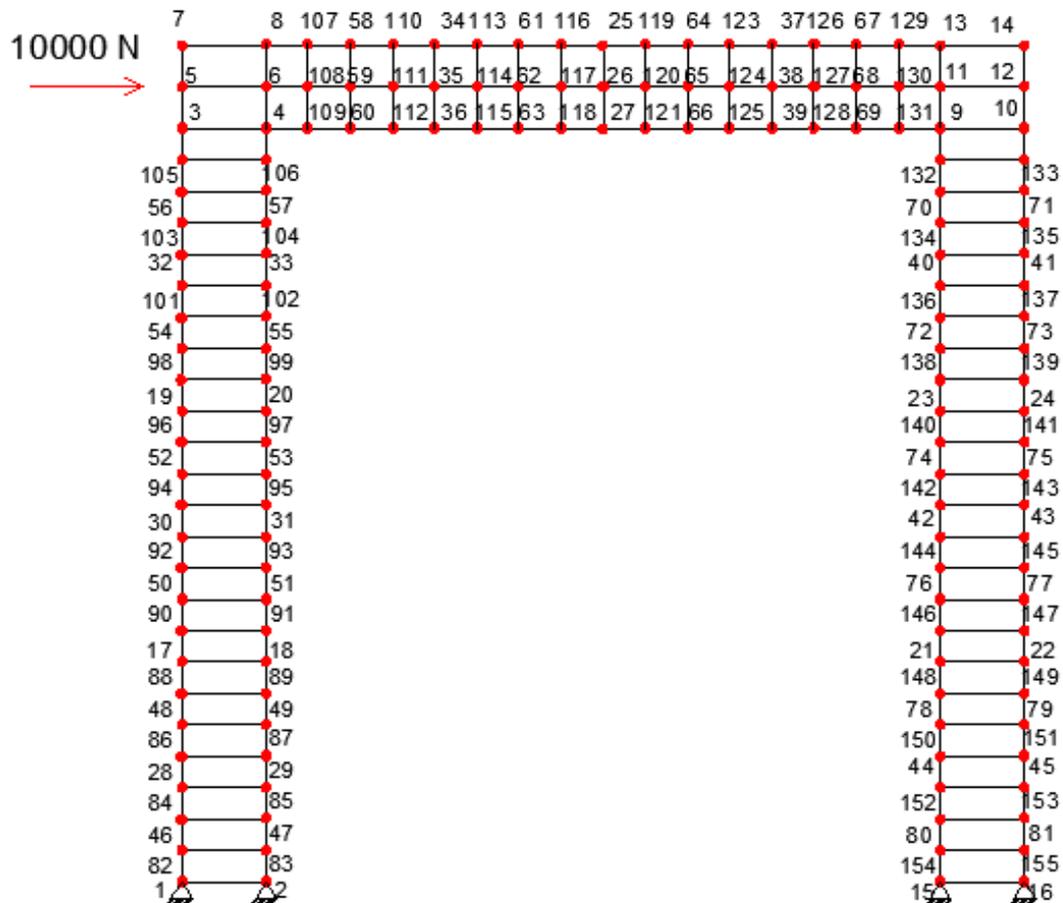


Figura 25: Refinamento pórtico com 56 elementos  
Fonte: Autoria própria

### 15. Refinamento das malhas do elemento torus 2D com 8 elementos.

- 16 nós;
- 8 elementos.

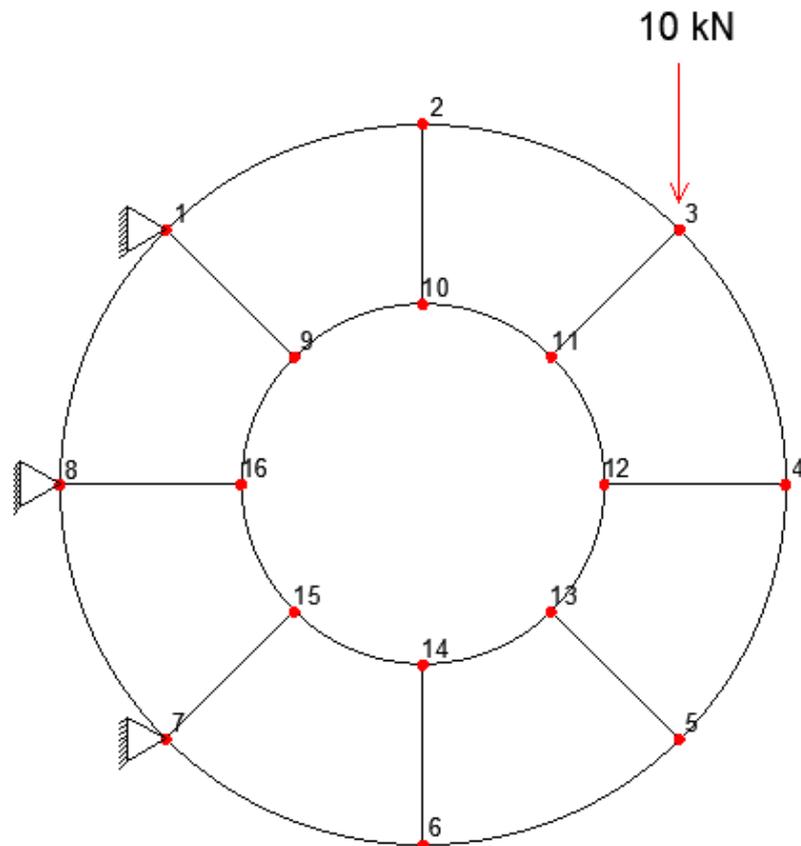


Figura 26: Refinamento torus 2D com 8 elementos  
Fonte: Autoria própria

16. Refinamento das malhas do elemento torus 2D com 16 elementos.

- 32 nós;
- 16 elementos.

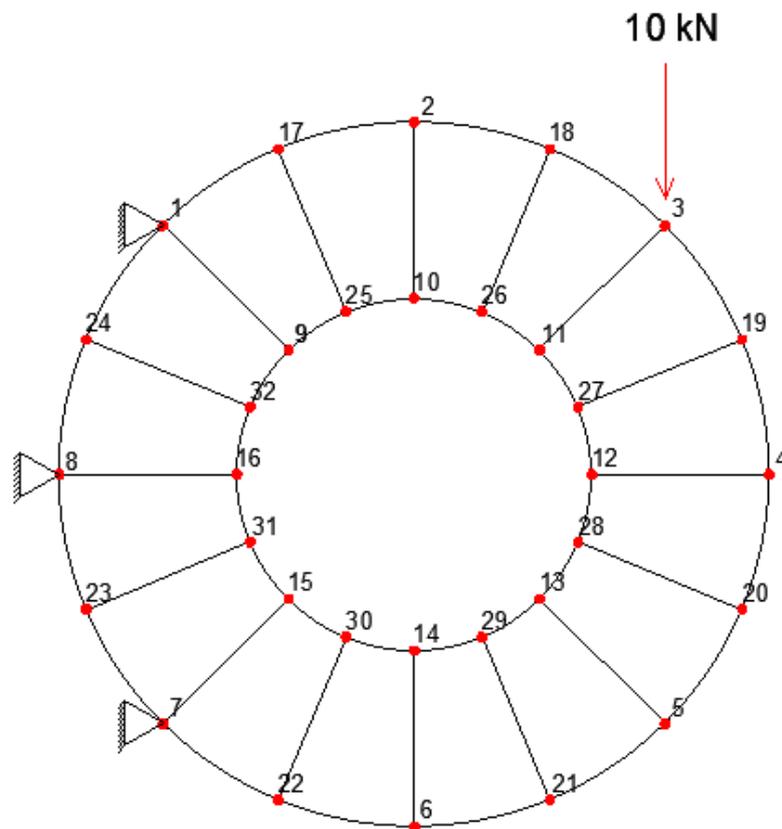


Figura 27: Refinamento torus 2D com 16 elementos  
Fonte: Autoria própria

17. Refinamento das malhas do elemento torus 2D com 32 elementos.

- 64 nós;
- 32 elementos.

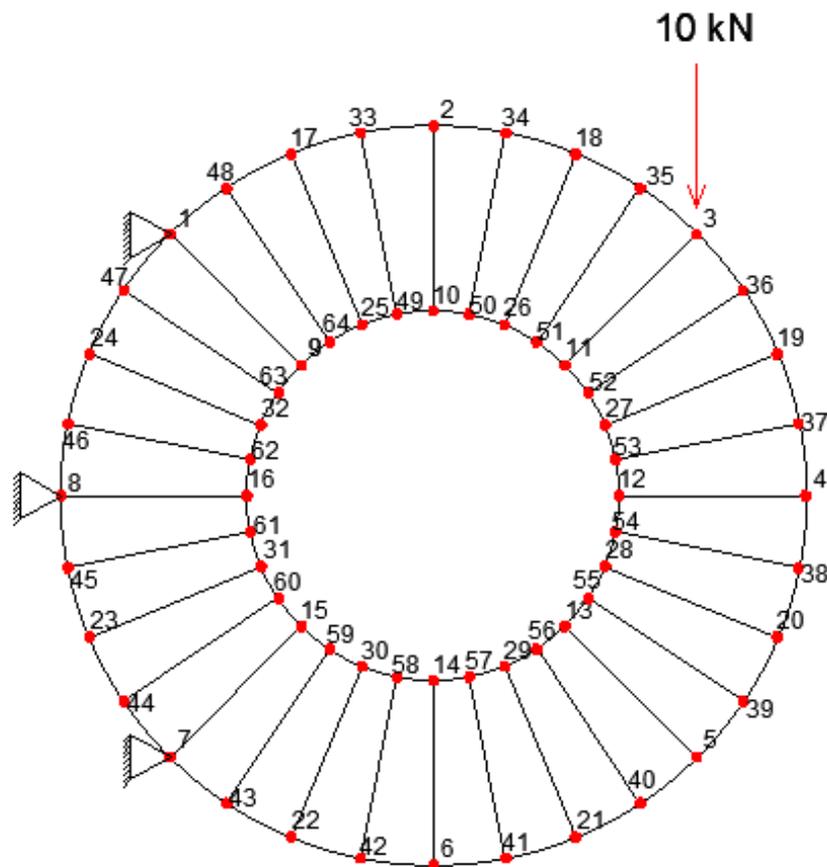


Figura 28: Refinamento torus 2D com 32 elementos  
Fonte: Autoria própria

18. Refinamento das malhas do elemento torus 2D com 64 elementos.

- 128 nós;
- 64 elementos.

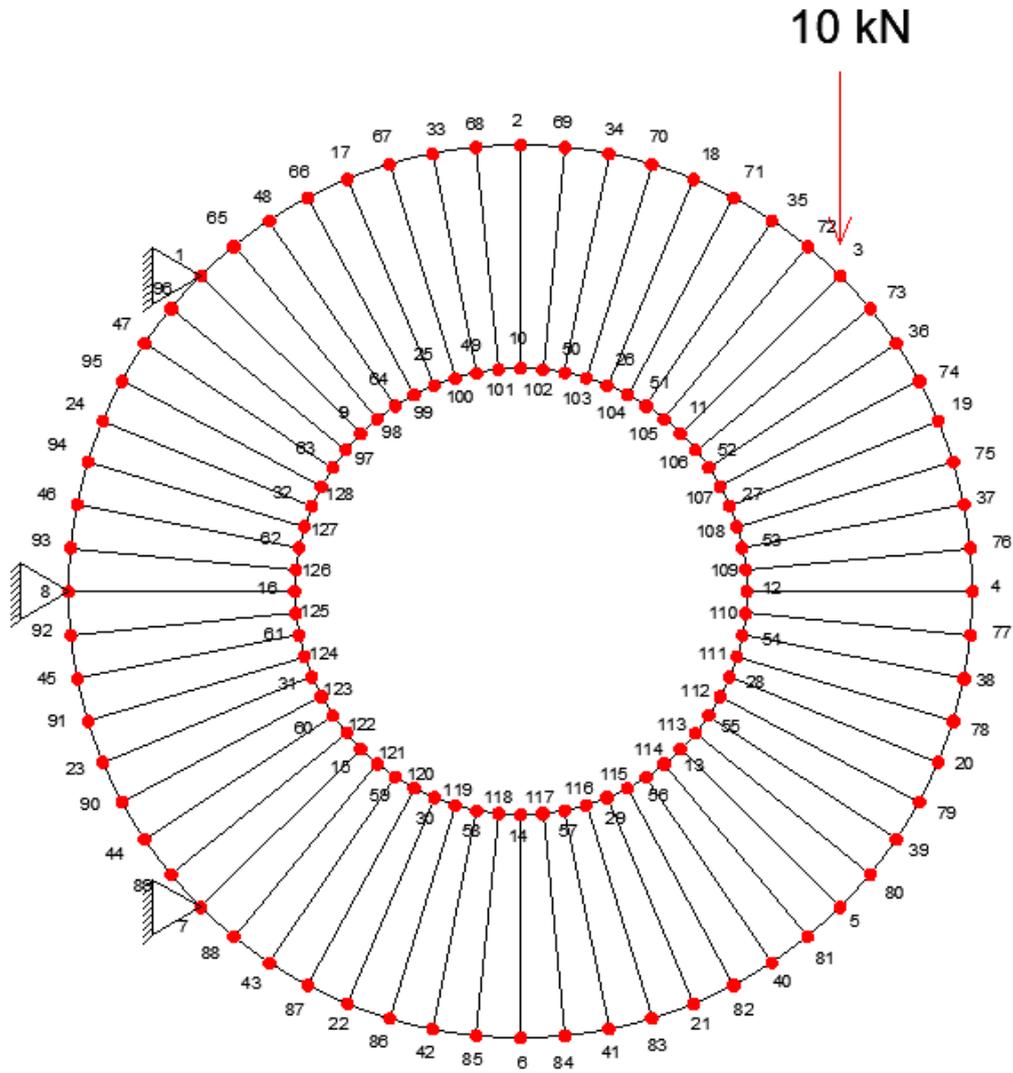


Figura 29: Refinamento torus 2D com 64 elementos  
Fonte: Autoria própria