REVISTA MIRANTE
Daqui se vê do alto!
Câmpus Anápolis de Ciências Exatas e Tecnológicas Henrique Santillo
Universidade Estadual de Goiás

Revista Mirante, Anápolis (GO), v. 15, n. 2, dez. 2022. ISSN 1981-4089

UTILIZAÇÃO DE FUNÇÕES DE DESCONTINUIDADE NO CÁLCULO DE ESFORÇOS SOLICITANTES E DESLOCAMENTOS EM VIGAS PRISMÁTICAS ISOSTÁTICAS

UTILIZACIÓN DE FUNCIONES DE DESCONTINUIDAD EN EL CÁLCULO DE FUERZAS INTERNAS Y DESPLAZAMIENTOS EN VIGAS PRISMÁTICAS ISOSTÁTICAS

EDSON TEJERINA CALDERÓN
Doutor em Engenharia Civil e Professor da Universidade Estadual de Goiás - UEG, Câmpus Central - Ciências Exatas e Tecnológicas, Anápolis / GO
edson.calderon@ueg.br

VINÍCIUS DE BARROS SOUZA
Engenheiro Civil e Mestre em Engenharia Civil pela Universidade de São Paulo - USP, Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos / SP.
viniciuswg@hotmail.com

Resumo: O traçado dos diagramas dos esforços solicitantes (força cortante e momento fletor) de uma viga com várias cargas atuando sobre ela, requer que mesma seja dividida em vários trechos ou regiões, para obter-se as expressões analíticas dos esforços solicitantes em cada um desses trechos, devido à existência de descontinuidades provocadas pelas cargas, o que torna seu cálculo consideravelmente trabalhoso. Para determinar as equações da fecha e da declividade pelo método de Integração Direta, o cálculo se torna ainda mais trabalhoso devido a que para cada trecho da viga são obtidas duas constantes de integração, decorrentes da aplicação do método, e a determinação dessas constantes requer um número igual de equações que deverão expressar a continuidade das flechas e declividades, bem como as condições de contorno dos vínculos da viga. O presente trabalho propõe uma alternativa para minimizar esse tipo de problemas utilizando-se operadores matemáticos, conhecidos como funções de descontinuidade, os quais permitem escrever as equações dos esforços solicitantes de uma viga com vários carregamentos, utilizando-se uma única expressão que poderá ser aplicada a todos os trechos da viga, e no caso dos deslocamentos, dispensa a aplicação das condições de igualdade em pontos comuns a dois trechos consecutivos, sendo apenas suficiente a aplicação das condições de contorno dos vínculos da viga, simplificando enormemente o seu cálculo e tornando-se bastante apropriada para sua implementação por meio de programão computacional. Para provar a eficiência da utilização de funções de descontinuidade, são realizados exemplos para comparar os resultados com os obtidos por métodos tradicionais.
Palavras-chave: Método de Clebsch. Funções de Macaulay. Vigas.

Resumen: La elaboración de los diagramas de las fuerzas internas (fuerza cortante y momento flector) de una viga con varias cargas actuando sobre ella, requiere dividirla en varios tramos o regiones, para obtener las expresiones analíticas de las fuerzas internas en cada un. de estos tramos, debido a la existencia de discontinuidades provocadas por las cargas, lo que hace considerablemente laborioso su cálculo. Para determinar las ecuaciones de la flecha y de la pendiente por el método de Integración Directa, el cálculo se vuelve aún más laborioso debido a que para cada sección de la viga se obtienen dos constantes de integración, resultantes de la aplicación del método, y la determinación de estas constantes requiere de un igual número de ecuaciones que deben expresar la continuidad de las flechas y pendientes, así como las condiciones de contorno de los vínculos de la viga. El presente trabajo propone una alternativa para minimizar este tipo de problemas utilizando operadores matemáticos, conocidos como funciones de discontinuidad, que permiten escribir las ecuaciones de los esfuerzos requeridos para una viga con varias cargas, utilizando una sola expresión que se puede aplicar a

Revista Mirante, Anápolis (GO), v. 15, n. 2, dez. 2022. ISSN 1981-4089

todos los tramos de la viga, y en el caso de los desplazamientos, se prescinde de la aplicación de condiciones de igualdad en puntos comunes a dos tramos consecutivos, bastando únicamente con aplicar las condiciones de contorno de los vículos de la viga, simplificando mucho su cálculo y haciéndola muy adecuada para su implementación a través de la programación de computadoras. Para probar la eficiencia del uso de funciones de discontinuidad, son realizados ejemplos para comparar los resultados con los obtenidos por métodos tradicionales.
Palabras-clave: Método de Clebsch. Funciones de Macaulay. Vigas.

Introdução

No traçado dos diagramas dos esforços solicitantes de uma viga (força cortante e momento fletor) são utilizadas expressões algébricas provenientes do seu carregamento, as quais podem ser utilizadas também para outros cálculos como a energia de deformação e a linha elástica da mesma. Quando se trata de uma carga distribuída contínua ao longo de toda a viga (figura 1-a), as expressões analíticas dos esforços solicitantes são facilmente determinadas devido à inexistência de descontinuidade no carregamento. Entretanto, se várias outras cargas atuam sobre a viga (figura 2), esta fica dividida em vários trechos ou regiões, sendo necessário então, obter as expressões analíticas dos esforços solicitantes para cada um desses trechos da viga, devido à existência de descontinuidades no carregamento, o que torna seu cálculo consideravelmente trabalhoso.

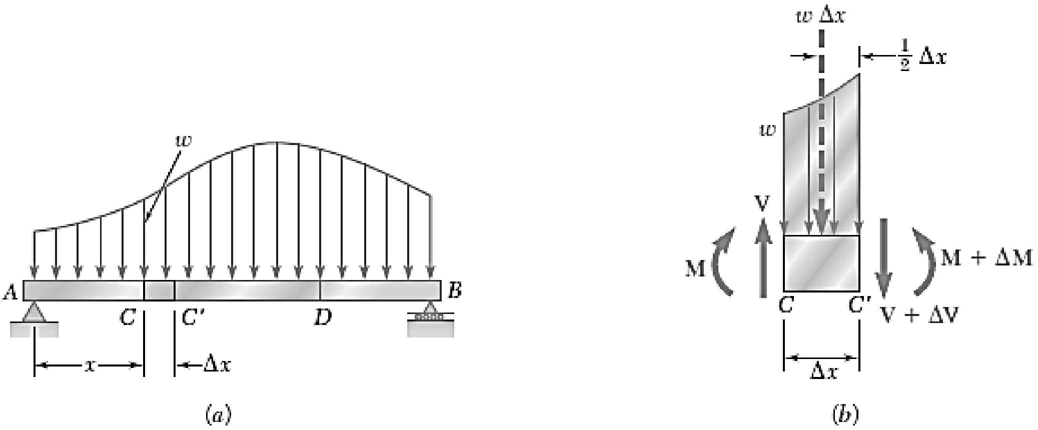

Figura 1. a) Viga com carga distribuída w(x) contínua e b) Elemento diferencial da viga.
Fonte: Autores, 2022.

Considerando-se em equilíbrio o elemento diferencial Δx da viga (figura 1-b), o qual está submetido a uma carga distribuída contínua w (x), podem ser obtidas as relações

Revista Mirante, Anápolis (GO), v. 15, n. 2, dez. 2022. ISSN 1981-4089

diferenciais que existem entre a carga w (x), a força cortante V (x) e o momento fletor M (x), (TUMOSHENKO; GERE, 1994), que são:

$$\frac{dV(x)}{dx} = -w(x) \quad (1)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x) \quad (2)$$

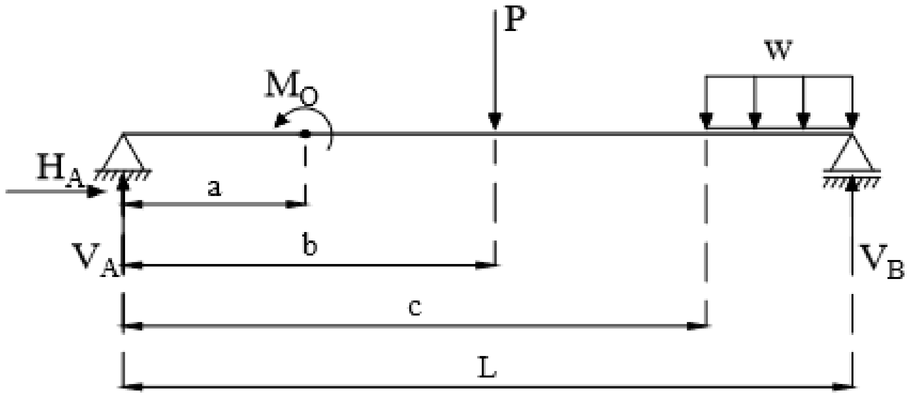

Figura 2. Viga com vários carregamentos.
Fonte: Autores, 2022.

Considerando-se agora uma viga, com vários tipos de cargas que dividem a mesma em quatro trechos ou regiões distintas (figura 2), nas quais as equações da força cortante e do momento fletor têm, respectivamente, as seguintes expressões, em relação à coordenada x com origem no ponto A:

$$Q(x) = V_A \qquad \text{para } 0 < x \leq a \quad (3)$$

$$M(x) = V_A x \qquad \text{para } 0 \leq x < a \quad (4)$$

$$Q(x) = V_A \qquad \text{para } a \leq x < b \quad (5)$$

$$M(x) = V_A x - M_0 \qquad \text{para } a < x \leq b \quad (6)$$

Revista Mirante, Anápolis (GO), v. 15, n. 2, dez. 2022. ISSN 1981-4089

$$Q(x) = V_A - P \quad \text{para } b < x \leq c \tag{7}$$

$$M(x) = V_A x - M_0 - Px \quad \text{para } b \leq x \leq c \tag{8}$$

$$Q(x) = V_A - P - w(x-c) \quad \text{para } c \leq x < L \tag{9}$$

$$M(x) = V_A x - M_0 - Px - \frac{w}{2}(x-c)^2 \quad \text{para } c \leq x \leq L \tag{10}$$

Com as expressões (3), (5), (7) e (9) e as expressões (4), (6), (8) e (10) podem ser traçados de forma exata, os diagramas da força cortante e momento fletor, respectivamente. Pode-se perceber que, para um número maior de cargas, o traçado dos diagramas dos esforços solicitantes irá se tornar cada vez mais trabalhoso.

Na determinação das flechas e declividades ao longo de uma viga, utilizando o método de Integração Direta, o cálculo se torna ainda mais trabalhoso e demorado quando a viga está dividida em vários trechos, pois a equação da linha elástica é representada por uma equação diferencial de segunda ordem (CRAING, 2003):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} \tag{11}$$

Sendo:

E - módulo de elasticidade longitudinal

I - momento de inércia da área da seção transversal

Integrando-se a equação (11), tem-se:

$$EI\frac{dy}{dx} = -\int M(x)dx + C_1 \tag{12}$$

REVISTA MIRANTE
Revista Mirante, Anápolis (GO), v. 15, n. 2, dez. 2022. ISSN 1981-4089

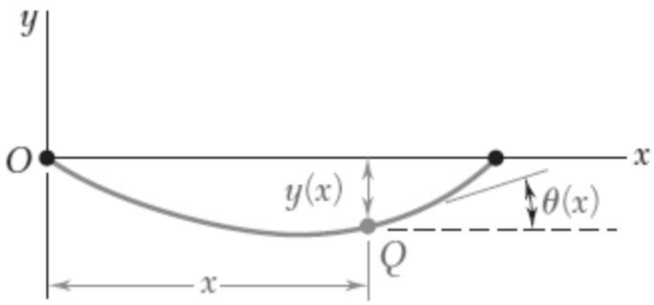

Figura 3. Flecha y (x) e declividade $\theta(x)$ em um ponto Q (x,y).
Fonte: Autores, 2022.

Sendo que $\theta(x)$ (figura 3), é o ângulo que a tangente à curva elástica no ponto Q (x,y) forma com a horizontal, ou seja:

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta(x) \cong \theta(x) \tag{13}$$

Desta forma, a equação (12) fica:

$$EI\theta(x) = -\int M(x)dx + C_1 \tag{14}$$

Integrando-se a equação (14), tem-se:

$$EIy(x) = \int[-\int M(x)dx + C_1]\,dx + C_2 \tag{15}$$

Desta forma, as equações (14) e (15) permitem calcular os deslocamentos (declividades e flechas, respectivamente) em qualquer ponto de uma viga. Pode-se verificar que para cada trecho da viga são obtidas duas constantes de integração, decorrentes da aplicação do método. A determinação dessas constantes requer um número igual de equações que deverão expressar a continuidade das flechas e declividades, bem como as condições de contorno dos vínculos da viga.

Revista Mirante, Anápolis (GO), v. 15, n. 2, dez. 2022. ISSN 1981-4089

A solução para problemas desse tipo pode ser minimizada utilizando-se operadores matemáticos conhecidos como funções de descontinuidade, os quais permitem escrever os esforços solicitantes de uma viga com vários carregamentos, utilizando-se uma única expressão que poderá ser aplicada a todos os trechos ao longo da viga. Para provar a eficiência da utilização de funções de descontinuidade, serão realizados exemplos para comparar os resultados com os obtidos por métodos tradicionais.

O presente trabalho propõe uma alternativa com a qual podem-se expressar as equações dos esforços solicitantes atuantes em cada trecho, por uma única expressão, utilizando-se operadores matemáticos, conhecidos como funções de descontinuidade ou funções singulares, as quais podem ser utilizadas também na determinação de flechas e declividades ao longo de uma viga, simplificando enormemente o seu cálculo.

As funções de descontinuidade, originalmente foram introduzidas e desenvolvidas pelo matemático alemão A. Clebsch (1833-1872) (RILEY *et al*., 2003) e tem relação com a função de passo unitário usada pelo físico britânico O. Heaviside (1850-1925) (POPOV, 1978), quem estendeu os métodos de cálculo operacional para analisar a resposta momentânea de circuitos elétricos. Todavia, é dado o crédito ao matemático e engenheiro inglês W. H. Macaulay (1853-1936) (BEER *et al*., 2006) pela introdução das funções singulares aos problemas de vigas, utilizando os colchetes $\langle\ \rangle$, geralmente chamados de colchetes de Macaulay.

Neste trabalho, as funções de descontinuidade ou funções singulares são utilizadas para determinar as equações dos esforços solicitantes (força cortante e momento fletor), representadas, cada uma delas, por uma única equação, que poderá ser aplicada a todos os trechos ao longo da viga, para o traçado dos seus respectivos diagramas. A partir da equação da linha elástica e conhecida a equação do momento fletor, podem ser obtidas as equações dos deslocamentos (declividade e flecha) e consequentemente o traçado dos seus respectivos diagramas, ficando eliminada a necessidade da aplicação das condições de igualdade em pontos comuns a dois trechos consecutivos, sendo apenas suficiente a aplicação das condições de contorno dos vínculos da viga.

Para um número inteiro n (positivo ou negativo) (RIBBELER, 2010), uma função singular de x é definida como:

$$\langle x-a\rangle^n = \begin{cases} 0 & \text{para } x < a \\ (x-a)^n & \text{para } x \geq a \end{cases}$$

(16)

Para n=0, tem-se:

$$\langle x-a\rangle^0 = \begin{cases} 0 & \text{para } x < a \\ 1 & \text{para } x \geq a \end{cases}$$

(17)

Os gráficos das funções singulares correspondentes, respectivamente, para n=0, n=1 e n=2, são representados na figura 4.

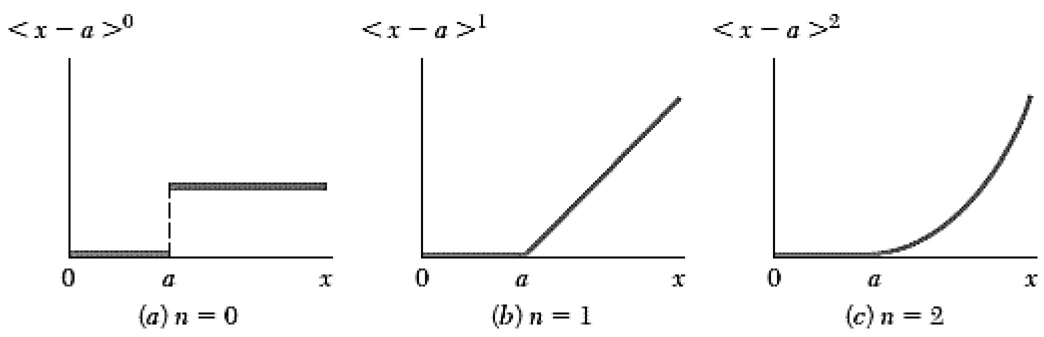

Figura 4. Gráficos de funções singulares.
Fonte: Autores, 2022.

Destas definições de funções singulares, pode-se concluir que:

$$\int \langle x-a\rangle^n dx = \frac{\langle x-a\rangle^{n+1}}{n+1} + C \qquad \text{para } n \geq 0 \tag{18}$$

Revista Mirante, Anápolis (GO), v. 15, n. 2, dez. 2022. ISSN 1981-4089

$$\frac{d}{dx}\langle x-a\rangle^{n}=n\langle x-a\rangle^{n-1} \qquad \text{para } n\geq 1 \tag{19}$$

Nas figuras 5, 6, 7 e 8, são apresentadas, o carregamento e os diagramas da Força Cortante e o Momento Fletor, para carga momento, carga concentrada, carga uniformemente distribuída e carga linearmente distribuída, com suas respectivas expressões matemáticas utilizando-se as funções de descontinuidade.

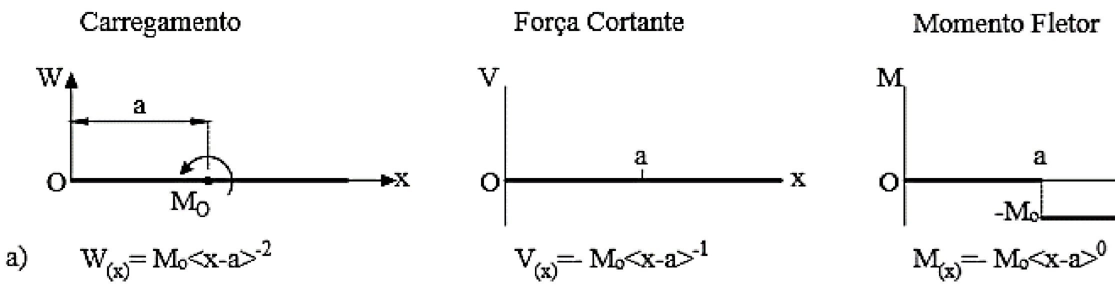

Figura 5. Carga momento M_0.
Fonte: Autores, 2022.

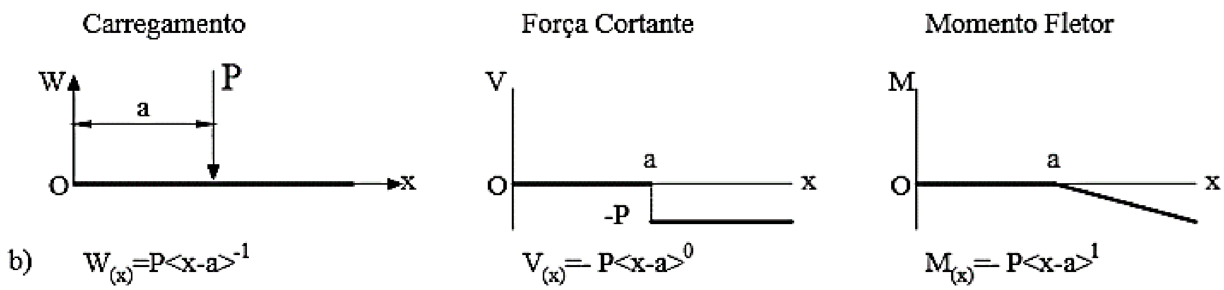

Figura 6. Carga concentrada P.
Fonte: Autores, 2022.

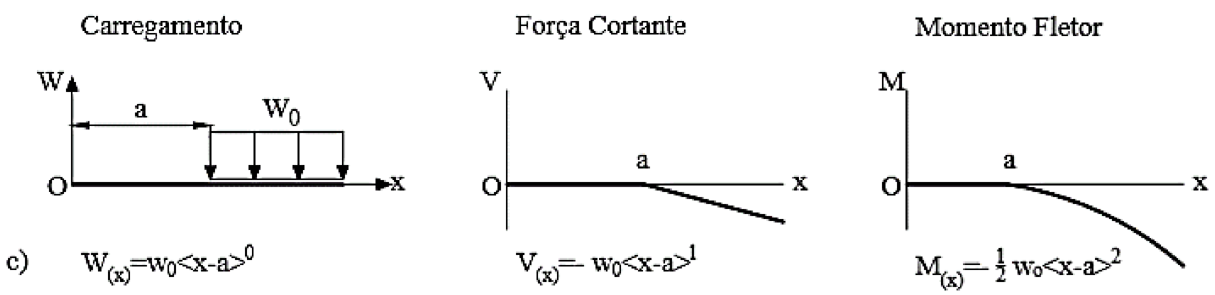

Figura 7. Carga uniformemente distribuída w_0.
Fonte: Autores, 2022.

Revista Mirante, Anápolis (GO), v. 15, n. 2, dez. 2022. ISSN 1981-4089

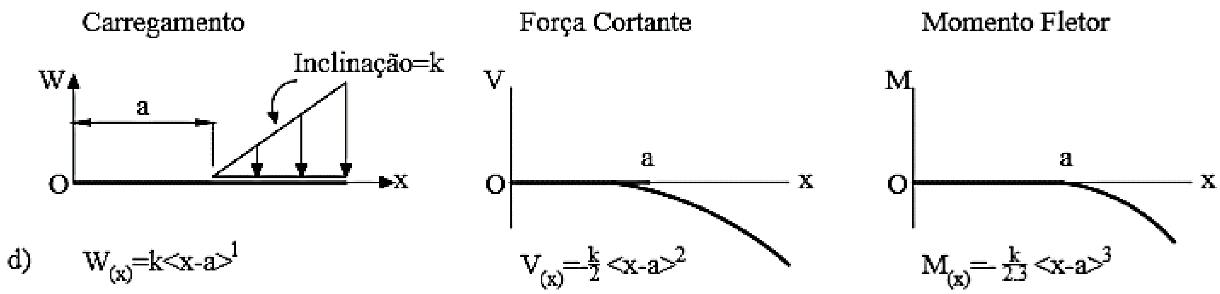

Figura 8. Carga linearmente distribuída com inclinação k.
Fonte: Autores, 2022.

Para provar a eficiência da utilização de funções de descontinuidade, são realizados exemplos para comparar os resultados com os obtidos por outros métodos.

Objetivos

Objetivo geral

- Fazer uma apresentação e estudo das funções de descontinuidade para a aplicação no cálculo dos esforços solicitantes e dos deslocamentos em vigas prismáticas isostáticas.

Objetivos específicos

- Obter as equações dos esforços solicitantes de uma viga isostática utilizando-se as funções de descontinuidade.
- Obter as equações dos deslocamentos de uma viga isostática utilizando-se as funções de descontinuidade.

Metodologia

A metodologia a ser empregada consistirá, inicialmente, no estudo teórico das funções de descontinuidade para os carregamentos normalmente utilizados nas estruturas, e sua imediata aplicação no cálculo de esforços solicitantes e de deslocamentos em estruturas isostáticas, mostrando assim, que a utilização das funções de descontinuidade é uma alternativa a mais em relação aos outros métodos tradicionais. Para isto, serão realizados

REVISTA MIRANTE
Daqui se vê do alto!
Câmpus Anápolis de Ciências Exatas e Tecnológicas Henrique Santillo
Universidade Estadual de Goiás
Revista Mirante, Anápolis (GO), v. 15, n. 2, dez. 2022. ISSN 1981-4089

diversos cálculos comparativos, para mostrar a eficiência, qualidades, vantagens e desvantagens em relação aos outros métodos.

Exemplos

Exemplo 1: Determinar as equações dos esforços solicitantes e dos deslocamentos da viga da figura 2, utilizando-se as funções de descontinuidade.

A equação da carga w(x) para a viga da figura 2 é:

$$w(x) = V_A\langle x-0\rangle^{-1} - M_0\,\langle x-a\rangle^{-2} - P\langle x-b\rangle^{-1} - w\langle x-c\rangle^{0} \qquad (20)$$

A partir da equação (1), as quatro equações (3, 5, 7 e 9) escritas anteriormente para a força cortante, podem ser representadas por uma única equação da seguinte forma:

$$Q(x) = V_A\langle x-0\rangle^{0} - M_0\,\langle x-a\rangle^{-1} - P\langle x-b\rangle^{0} - w\langle x-c\rangle^{1} + C_1 \qquad (21)$$

A partir da equação (2), a equação do momento fletor, representada pelas equações 4, 6, 8 e 10, fica:

$$M(x) = V_A\langle x-0\rangle^{1} - M_0\,\langle x-a\rangle^{0} - P\langle x-b\rangle^{1} - \frac{w}{2}\langle x-c\rangle^{2} + C_1x + C_2 \qquad (22)$$

Aplicando-se a s condições de contorno para $x=0^+$, isto é, $V(0^-)=0$ e $M(0^+)=0$, obtêm-se $C_1=0$ e $C_2=0$, logo:

$$Q(x) = V_A\langle x-0\rangle^{0} - M_0\,\langle x-a\rangle^{-1} - P\langle x-b\rangle^{0} - w\langle x-c\rangle^{1} \qquad (23)$$

$$M(x) = V_A\langle x-0\rangle^{1} - M_0\,\langle x-a\rangle^{0} - P\langle x-b\rangle^{1} - \frac{w}{2}\langle x-c\rangle^{2} \qquad (24)$$

Utilizando-se as equações (14) e (15), na equação do momento fletor (24) obtêm-se, respectivamente:

Revista Mirante, Anápolis (GO), v. 15, n. 2, dez. 2022. ISSN 1981-4089

$$EI\theta(x) = V_A \frac{\langle x-0\rangle^2}{2} - M_0 \langle x-a\rangle^1 - P\frac{\langle x-b\rangle^2}{2} - \frac{w}{2}\frac{\langle x-c\rangle^3}{3} + C_3 \quad (25)$$

$$EIy(x) = \frac{V_A}{2}\frac{\langle x-0\rangle^3}{3} - M_0\frac{\langle x-a\rangle^2}{2} - \frac{P}{2}\frac{\langle x-b\rangle^3}{3} - \frac{w}{6}\frac{\langle x-c\rangle^4}{4} + C_3x + C_4 \quad (26)$$

Aplicando-se a s condições de contorno para x=0 e x=L, isto é, $y(0^-)=0$ e y(L)=0, obtêm-se: C_3=0 e $C_4 = -\frac{V_A}{6}L^2 + \frac{M_0}{2L}(L-a)^2 - \frac{P}{6L}(L-b)^3 - \frac{w}{24L}(L-c)^4$, logo:

$$EI\theta(x) = \frac{V_A}{2}\langle x-0\rangle^2 - M_0\langle x-a\rangle^1 - \frac{P}{2}\langle x-b\rangle^2 - \frac{w}{6}\langle x-c\rangle^3 \quad (27)$$

$$EIy(x) = \frac{V_A}{6}\langle x-0\rangle^3 - \frac{M_0}{2}\langle x-a\rangle^2 - \frac{P}{6}\langle x-b\rangle^3 - \frac{w}{24}\langle x-c\rangle^4 + C_4 \quad (28)$$

Exemplo 2: Determinar as equações dos esforços solicitantes e dos deslocamentos da viga da figura 9, da forma tradicional e utilizando-se as funções de descontinuidade.

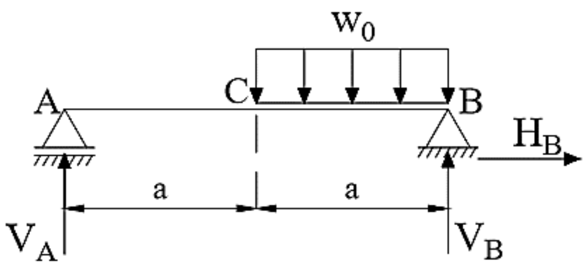

Figura 9. Viga com carga uniformemente distribuída w_0.
Fonte: Autores, 2022.

A viga está composta por dois trechos, AC e CB. Aplicando-se as equações de equilíbrio, obtêm-se a reação de apoio V_A (figura 10-a):

$$\sum M_B = 0 \rightarrow \; V_A(2a) - w_0 a\left(\frac{a}{2}\right) = 0 \rightarrow \qquad V_A = \frac{1}{4}w_0 a \quad (29)$$

REVISTA MIRANTE
Revista Mirante, Anápolis (GO), v. 15, n. 2, dez. 2022. ISSN 1981-4089

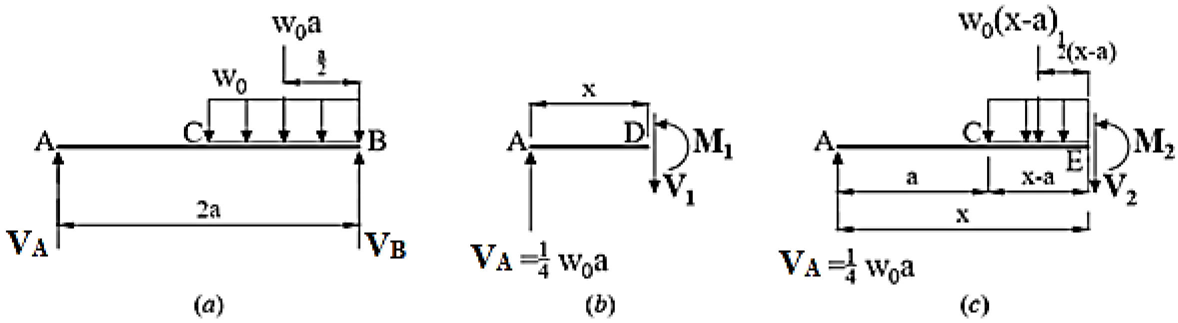

Figura 10. Reações de apoio e diagramas de corpo livre para os trechos AC e CB.
Fonte: Autores, 2022.

Para o trecho AC (figura 10-b), obtêm-se a partir do equilíbrio, as equações da força cortante e o momento fletor, respectivamente:

$$V_1(x) = \frac{1}{4} w_0 a \qquad\qquad M_1(x) = \frac{1}{4} w_0 a x \tag{30}$$

Da mesma forma, para o trecho CB (figura 10-c), tem-se a partir do equilíbrio:

$$V_2(x) = \frac{1}{4} w_0 a - w_0 (x - a) \qquad\qquad M_2(x) = \frac{1}{4} w_0 a x - \frac{1}{2} w_0 (x - a)^2 \tag{31}$$

Resultando assim, duas equações em cada trecho. Utilizando as funções de descontinuidade, a carga fica representada por:

$$w(x) = -R_A \langle x - 0 \rangle^{-1} + w_0 \langle x - a \rangle^0 - R_B \langle x - 2a \rangle^{-1} \tag{32}$$

A força cortante e o momento fletor podem ser obtidos pela integração da carga utilizando-se as equações 1 e 2, respectivamente, isto é:

$$V(x) = -\int w(x) dx = V_A \langle x - 0 \rangle^0 - w_0 \langle x - a \rangle^1 + V_B \langle x - 2a \rangle^0 + C_1 \tag{33}$$

$$M(x) = \int V(x) dx = V_A \langle x - 0 \rangle^1 - \frac{w_0}{2} \langle x - a \rangle^0 + V_B \langle x - 2a \rangle^1 + C_1 x + C_2 \tag{34}$$

Observando que para V(0$^-$)=0 e M(0$^+$)=0, obtêm-se, C_1=0 e C_2=0, e para V(2a$^+$)=0 e M(2a)=0, obtêm-se as reações de apoio $V_A = \frac{1}{4} w_0 a$ e. $V_B = \frac{3}{4} w_0 a$, logo:

$$V(x) = V_A \langle x - 0 \rangle^0 - w_0 \langle x - a \rangle^1 + V_B \langle x - 2a \rangle^0 \tag{35}$$

$$M(x) = V_A \langle x - 0 \rangle^1 - \frac{w_0}{2} \langle x - a \rangle^2 + V_B \langle x - 2a \rangle^1 \tag{36}$$

Como à direita da reação de apoio V_B não existem outras cargas, as equações (35) e (36), podem ainda ser escritas de forma simplificada como:

$$V(x) = \frac{1}{4} w_0 a \langle x - 0 \rangle^0 - w_0 \langle x - a \rangle^1 \tag{37}$$

$$M(x) = \frac{1}{4} w_0 a \langle x - 0 \rangle^1 - \frac{w_0}{2} \langle x - a \rangle^2 \tag{38}$$

Utilizando-se as equações (14) e (15), na equação do momento fletor (38) obtêm-se, respectivamente:

$$EI\theta(x) = -\frac{1}{4} w_0 a \frac{\langle x-0 \rangle^2}{2} + \frac{w_0}{2} \frac{\langle x-a \rangle^3}{3} + C_3 \tag{39}$$

$$EIy(x) = -\frac{1}{8} w_0 a \frac{\langle x-0 \rangle^3}{3} + \frac{w_0}{6} \frac{\langle x-a \rangle^4}{4} + C_3 x + C_4 \tag{40}$$

Aplicando-se a s condições de contorno para x=0 e x=2a, isto é, y(0$^-$)=0 e y(2a)=0, obtêm-se: C_4=0 e $C_3 = \frac{7}{48} w_0 a^3$, logo:

$$EI\theta(x) = -\frac{1}{8} w_0 a \langle x - 0 \rangle^2 + \frac{w_0}{6} \langle x - a \rangle^3 + \frac{7}{48} w_0 a^3 \tag{41}$$

Revista Mirante, Anápolis (GO), v. 15, n. 2, dez. 2022. ISSN 1981-4089

$$EIy(x) = -\frac{1}{24}w_0 a\langle x-0\rangle^3 + \frac{w_0}{24}\langle x-a\rangle^4 + \frac{7}{48}w_0 a^3 x \quad (42)$$

Exemplo 3: Determinar as equações dos esforços solicitantes e dos deslocamentos da viga da figura 11, utilizando-se as funções de descontinuidade.

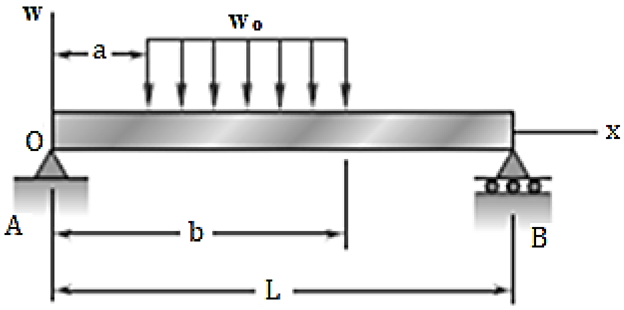

Figura 11. Carga uniformemente distribuída w_0.
Fonte: Autores, 2022.

Neste caso, quando a carga distribuída atua apenas parcialmente na viga, pode-se recorrer ao artifício apresentado na figura 12.

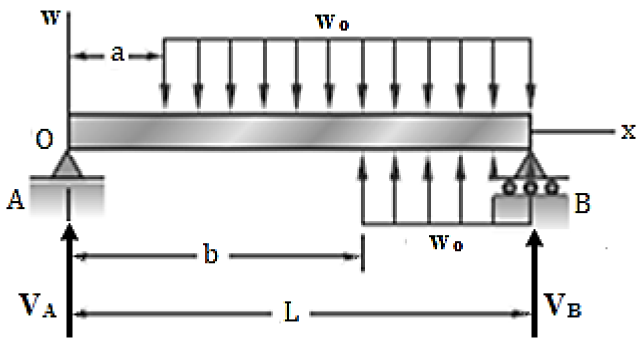

Figura 12. Carga uniformemente distribuída w_0.
Fonte: Autores, 2022.

Desta forma, a equação da carga é dada por:

$$w(x) = -V_A\langle x-0\rangle^{-1} + w_0\langle x-a\rangle^0 - w_0\langle x-b\rangle^0 \quad (43)$$

Sendo V_A, a reação do apoio no ponto A da viga.

Revista Mirante, Anápolis (GO), v. 15, n. 2, dez. 2022. ISSN 1981-4089

A força cortante e o momento fletor, podem ser obtidos aplicando-se as equações 1 e 2 respectivamente:

$$V(x) = V_A\langle x-0\rangle^0 - w_0\langle x-a\rangle^1 + w_0\langle x-b\rangle^1 \qquad (44)$$

$$M(x) = V_A\langle x-0\rangle^1 - \frac{1}{2}w_0\langle x-a\rangle^2 + \frac{1}{2}w_0\langle x-b\rangle^2 \qquad (45)$$

Utilizando-se as equações (14) e (15), na equação do momento fletor (45) obtêm-se, respectivamente:

$$EI\theta(x) = -V_A\frac{\langle x-0\rangle^2}{2} + \frac{1}{2}w_0\frac{\langle x-a\rangle^3}{3} - \frac{1}{2}w_0\frac{\langle x-b\rangle^3}{3} + C_3 \qquad (46)$$

$$EIy(x) = -\frac{1}{2}V_A\frac{\langle x-0\rangle^3}{3} + \frac{1}{6}w_0\frac{\langle x-a\rangle^4}{4} - \frac{1}{6}w_0\frac{\langle x-b\rangle^4}{4} + C_3x + C_4 \qquad (47)$$

Aplicando-se a s condições de contorno para x=0 e x=L, isto é, $y(0^-)=0$ e y(L)=0, obtêm-se: $C_4=0$ e $C_3 = \frac{V_A}{6}L^2 - \frac{w_0}{24L}[(L-a)^4 - (L-b)^4]$, logo:

$$EI\theta(x) = -\frac{1}{2}V_A\langle x-0\rangle^2 + \frac{1}{6}w_0\langle x-a\rangle^3 - \frac{1}{6}w_0\langle x-b\rangle^3 + C_3 \qquad (48)$$

$$EIy(x) = -\frac{1}{6}V_A\langle x-0\rangle^3 + \frac{1}{24}w_0\langle x-a\rangle^4 - \frac{1}{24}w_0\langle x-b\rangle^4 + C_3xC_4 \qquad (49)$$

Exemplo 4: Determinar as equações dos esforços solicitantes e dos deslocamentos da viga da figura 13-a, utilizando-se as funções de descontinuidade.

Como se trata de uma viga com cargas distribuídas parcialmente ao longo do seu comprimento, pode-se recorrer novamente ao artifício já apresentado, como se mostra na figura 13 (b-e). Desta forma, a equação da carga é dada por:

$$w(x) = -V_A\langle x-0\rangle^{-1} + k_1\langle x-a\rangle^1 - k_2\langle x-b\rangle^1 - w_3\langle x-b\rangle^0 - w_2\langle x-c\rangle^0 \quad (50)$$

Revista Mirante, Anápolis (GO), v. 15, n. 2, dez. 2022. ISSN 1981-4089

Sendo:

$$k_1 = \frac{\frac{w_1}{b-a}(L-b)+(w_1-w_2)+w_2}{L-a} = \frac{w_1}{b-a} \tag{51}$$

$$k_2 = \frac{\frac{w_1}{b-a}(L-b)}{L-b} = \frac{w_1}{b-a} \tag{52}$$

$$w_3 = w_1 - w_2 \tag{53}$$

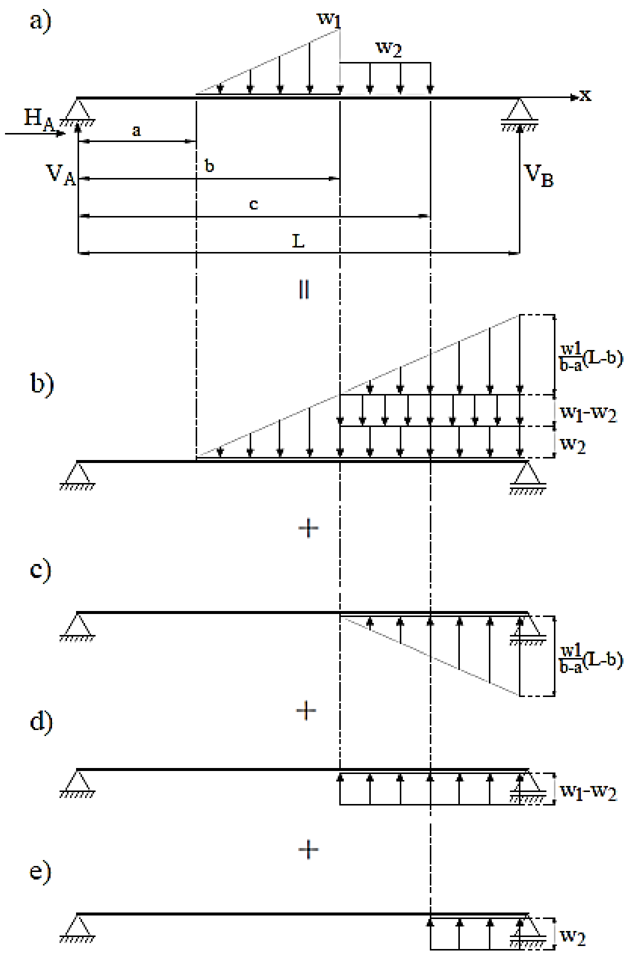

Figura 13. Viga com cargas parcialmente distribuídas linearmente w_1 e uniformemente w_2.
Fonte: Autores, 2022.

Logo, as expressões da força cortante e do momento fletor são, respectivamente:

$$V(x) = V_A\langle x-0\rangle^0 - \frac{k_1}{2}\langle x-a\rangle^2 + \frac{k_1}{2}\langle x-b\rangle^2 + w_3\langle x-b\rangle^1 + w_2\langle x-c\rangle^1 \qquad (54)$$

$$M(x) = V_A\langle x-0\rangle^1 - \frac{k_1}{6}\langle x-a\rangle^3 + \frac{k_1}{6}\langle x-b\rangle^3 + \frac{w_3}{2}\langle x-b\rangle^2 + \frac{w_2}{2}\langle x-c\rangle^2 \qquad (55)$$

Utilizando-se as equações (14) e (15), na equação do momento fletor (54) obtêm-se, respectivamente:

$$EI\theta(x) = -V_A\frac{\langle x-0\rangle^2}{2} - \frac{k_1}{6}\frac{\langle x-a\rangle^4}{4} + \frac{k_1}{6}\frac{\langle x-b\rangle^4}{4} + \frac{w_3}{2}\frac{\langle x-b\rangle^3}{3} + \frac{w_2}{2}\frac{\langle x-c\rangle^3}{3} + C_3 \qquad (56)$$

$$EIy(x) = -\frac{V_A}{2}\frac{\langle x-0\rangle^3}{3} - \frac{k_1}{24}\frac{\langle x-a\rangle^5}{5} + \frac{k_1}{24}\frac{\langle x-b\rangle^5}{5} + \frac{w_3}{6}\frac{\langle x-b\rangle^4}{4} + \frac{w_2}{6}\frac{\langle x-c\rangle^4}{4} + C_3x + C_4 \qquad (57)$$

Aplicando-se a s condições de contorno para x=0 e x=L, isto é, $y(0^-)=0$ e y(L)=0, obtêm-se: $C_4=0$ e $C_3 = -\frac{V_A}{6}L^2 + \frac{k_1}{120L}(L-a)^5 - \frac{k_2}{120L}(L-b)^5 - \frac{w_3}{24L}(L-b)^4 - \frac{w_2}{24L}(L-c)^4$, logo:

$$EI\theta(x) = -\frac{V_A}{2}\langle x-0\rangle^2 - \frac{k_1}{24}\langle x-a\rangle^4 + \frac{k_1}{24}\langle x-b\rangle^4 + \frac{w_3}{6}\langle x-b\rangle^3 + \frac{w_2}{6}\langle x-c\rangle^3 + C_3 \qquad (58)$$

$$EIy(x) = -\frac{V_A}{6}\langle x-0\rangle^3 - \frac{k_1}{120}\langle x-a\rangle^5 + \frac{k_1}{120}\langle x-b\rangle^5 + \frac{w_3}{24}\langle x-b\rangle^4 + \frac{w_2}{24}\langle x-c\rangle^4 + C_3x \qquad (59)$$

Conclusão

Pode-se observar que, uma vez conhecidos os mecanismos que envolvem as funções de singularidade, a determinação das equações e consequentemente o traçado dos diagramas dos esforços solicitantes tornam-se bastante simples. Determinando-se a equação do momento

Revista Mirante, Anápolis (GO), v. 15, n. 2, dez. 2022. ISSN 1981-4089

fletor com a metodologia apresentada, as equações da declividade e da flecha ao logo de uma viga podem ser determinadas aplicando-se as equações 14 e15, considerando-se apenas as condições de conto dos vínculos da viga. Pode-se observar também que, a utilização das funções de descontinuidade no traçado de diagramas dos esforços solicitantes e dos deslocamentos de uma viga, é bastante apropriada para sua implementação por meio de programão computacional.

Referências

BEER, F. P.; JOHNSTON JR., E. R.; DEWOLF, J. T. **Resistência dos materiais**. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.

CRAING JR, R. R. **Mecânica dos materiais**. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

POPOV, E. P. **Introdução à mecânica dos sólidos**. São Paulo: Edgard Blücher, 1978.

RILEY, W. F.; STURGES, L. D.; MORRIS, D. H. **Mecânica dos materiais**. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. E. (1994). **Mecânica dos sólidos**. Rio de Janeiro: LTC, 1994.