

O ENSINO DO CONCEITO DE FUNÇÃO UTILIZANDO A TEORIA DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL DE DAVYDOV

TEACHING THE CONCEPT OF FUNCTION USING DAVYDOV'S DEVELOPMENTAL TEACHING THEORY

LEONARDO ANTÔNIO SOUTO

Docente da UEG - Universidade Estadual de Goiás, *Campus* Central - CET, Anápolis (GO) e da PUC Goiás - Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia (GO).
leonardosouto12@yahoo.com.br

Resumo: Este artigo tem como objetivo apresentar os dados da minha pesquisa de doutorado sobre o ensino do conceito de função utilizando a teoria do ensino desenvolvimento de Davydov, que tem como fundamento teórico a teoria histórico-cultural formulado por Lev Vygotsky, cuja origem epistemológica está no materialismo histórico dialético. A partir de uma metodologia histórica-bibliográfica e documental, fundamentada numa perspectiva dialética, realizamos um estudo lógico-histórico do conteúdo de função, com a finalidade de obter as contradições e superações da comunidade de matemáticos para uma sintetização do seu conceito geral. Aprofundando na leitura de premissas da teoria histórico-cultural para estudar os componentes do processo de ensino-aprendizagem, como conteúdos, objetivos, métodos de ensino e, realizando uma excursão lógico-histórica e dialética para compreender o conceito geral de função por meio de suas sínteses, o resultado obtido, a partir desta incursão investigativa, foi a elaboração de uma atividade de ensino Davydoviano para o conceito de funções, destinado aos alunos do primeiro ano do ensino médio. Neste sentido buscou-se produzir com esta pesquisa contribuições para a formação do conceito matemático relativo ao conteúdo de funções, e que o resultado deste artigo traga novas visões e novos instrumentos que dará maior qualidade ao ensino da Matemática.

Palavras-chave: Ensino. Funções. Teoria histórico-cultural. Movimento Lógico-Histórico. Teoria do ensino desenvolvimental de Davydov.

Abstract: This article aims to present data from my research on the teaching of the concept of function using Davydov theory of teaching development, which has as its theoretical foundation the cultural-historical theory formulated by Lev Vygotsky, whose epistemological origin is in dialectical historical materialism. Based on a historical-bibliographic and documental methodology, based on a dialectical perspective, we carried out a logical-historical study of the content of function, in order to obtain the contradictions and overcoming of the community of mathematicians for a synthesis of its general concept. Deepening the reading of premises of cultural-historical theory to study the components of the teaching-learning process, such as contents, objectives and teaching methods, and carrying out a logical-historical and dialectical excursion to understand the general concept of function through its syntheses, the result obtained, from this investigative incursion, was the elaboration of a Davydovian teaching proposal for the concept of functions, aimed at first-year high school students. In this sense, we sought to produce with these research contributions to the formation of the mathematical concept related to the content of functions, and that the result of this article brings new visions and new instruments that will give greater quality to the teaching of Mathematics.

Keywords: Teaching. Functions. Historical-cultural theory. Logical-Historical Movement. Davydov's theory of developmental teaching.

INTRODUÇÃO

Um dos maiores desafios encontrado pelas escolas da atualidade é o desinteresse dos alunos em aprender conhecimentos científicos e, no que diz respeito à disciplina de matemática, existe um agravante: a dificuldade dos discentes em abstrair os conceitos matemáticos e relacioná-los com o cotidiano. Pensar em uma educação abrangente, onde a prioridade seja ensinar princípios científicos - por acreditar ser este o verdadeiro papel da escola - em uma época em que existe excesso de informação aliado a uma sociedade que possui um ritmo de vida alucinante e transforma-se a passos cada dia mais acelerados, não é nada fácil. Considerando as complexidades do contexto escolar - da mais simples a mais sofisticada - o professor é aquele que ocupa uma função primordial no contexto educacional. É a partir de um olhar voltado ao aluno que o processo de ensino se inicia, quer seja no momento do planejamento do conteúdo, na escolha do método de ensino, no domínio da ferramenta didática ou até mesmo na formação e especialização docente.

Tenho observado, pela minha experiência, na docência do ensino superior na área de matemática nos períodos iniciais dos cursos de Engenharias, Matemática, Administração, Economia e Ciências Contábeis, que os estudantes ingressos nesses cursos estão tendo muitas dificuldades de aprendizagem nas disciplinas pré- cálculo e cálculo I (Engenharias) e Matemática I (Administração, Contábeis e Economia), que são consideradas matérias de conhecimento básico para os alunos prosseguirem nos seus estudos nos respectivos cursos, culminando num alto índice de reprovação. Pesquisas atribuem o problema à falta de preparo dos alunos, pois vêm se acumulando ao longo de todo o ensino básico culminando no ensino superior, onde os conteúdos são ensinados com fórmulas decoradas, sem a abstração dos conceitos básicos da matemática. Podemos citar os resultados recentes em testes nacionais e internacionais, como o *Programme for International Student Assessment (PISA)*¹, que coloca o Brasil numa situação desconfortante com relação a diversos países.

¹ Disponível em: Relatório Brasil no PISA 2018-2 versão.indd (inep.gov.br).

É evidente que existem muitas variáveis a serem consideradas, que influenciam o baixo rendimento escolar brasileiro, como políticas públicas vinculadas aos organismos multilaterais com forte interesse em formar mão de obra barata, formação inicial e continuada inadequadas, sem uma política de reconhecimento social de professores, infraestrutura familiar precária, problemas sociais, entre outros. Nesse sentido, esperamos contribuir propondo este estudo, com intuito de levar para o chão da escola aspectos relevantes relacionados à metodologia de ensino em Matemática.

Para Libâneo (2012), com as políticas educacionais vinculadas aos organismos multilaterais, a escola assume as seguintes características: a) conteúdos de aprendizagem entendidos como competências e habilidades mínimas para a sobrevivência e o trabalho (como um kit de habilidades para a vida); b) avaliação do rendimento escolar por meio de indicadores de caráter quantitativo, ou seja, independentemente de processos de aprendizagem e formas de aprender; c) aprendizagem de valores e atitudes requeridos pela nova cidadania (ênfase na sociabilidade pela vivência de ideais de solidariedade e participação no cotidiano escolar).

Neste contexto, temos uma educação pensada e organizada, prioritariamente, em uma lógica econômica e de preparação ao mercado de trabalho, em detrimento de uma escola que visa o domínio do saber sistematizado mediante o qual se promove o desenvolvimento de capacidades intelectuais, como condição de assegurar o direito à semelhança, à igualdade (LIBÂNEO, 2012). Por outro, é preciso considerar que essa função primordial da escola – a formação cultural e científica – destina-se a sujeitos diferentes, já que a diferença não é uma excepcionalidade da pessoa humana, mas condição concreta do ser humano e das situações educativas (LIBÂNEO, 2012).

A pedagogia tradicional não é capaz de expressar a especificidade do pensar humano e, portanto, não caracteriza o processo que generaliza e forma conceitos e em decorrência disso, o ensino dos conceitos se apresenta desvinculado de suas procedências. Os professores muitas vezes dão respostas a perguntas que os alunos não

formularam e esperam que eles entendam. Mostram uma matemática aparentemente pronta e acabada, sem estimular o pensamento que levou a formular os conceitos.

Os estudos de Davydov indicam que a ensino tradicional não caracteriza o processo gerador e formativo do conceito conforme Sousa (2016).

Dessa forma ignora-se na maioria das escolas brasileiras tudo o que permite conhecer a gênese e a natureza dos conceitos por não estar em consonância com as suas possibilidades. [...]. Nesta perspectiva, as crianças saem da escola com a impressão de que os conceitos científicos que aparecem nos livros didáticos de forma linear, sem apresentar hesitação, contradição e rupturas estão prontos e acabados (SOUSA, 2016, p. 61).

Portanto, como os conhecimentos matemáticos foram formados historicamente, fica evidente que o conhecimento que temos hoje é consequência do desenvolvimento lógico-histórico. Logo, a história e a epistemologia dos conceitos devem ser trabalhadas no ensino de maneira a buscar no processo histórico o movimento do pensamento, no contexto em que os conceitos foram desenvolvidos. Assim, ela serve como um rico recurso para elaboração de propostas didáticas, já que essa busca conduz a apropriação do conceito pelo indivíduo.

Com relação ao ensino do conceito de função, tal conteúdo é desenvolvido com ênfase nos aspectos formais conceituais, na sua representação analítica, expressa por uma expressão Matemática que relaciona duas variáveis x e y e também na representação gráfica. Essas representações são utilizadas para trabalhar alguns tipos particulares de função, como as funções polinomiais do 1º e 2º grau.

Os nexos conceituais² de função envolvem noções que não são destacadas na sala de aula, como interdependência e fluência. Caraça (2003) apresenta a ideia de interdependência como todas as coisas que existem no mundo estão relacionadas umas com as outras, ou seja, nada ocorre de maneira isolada. Já a fluência é a noção de que tudo que existe está em constante movimento, transformação, o que Caraça (2003)

² Os nexos conceituais que fundamentam os conceitos contêm a lógica, a história, as abstrações, as formalizações do pensar humano no processo de constituir-se ser humano. Definimos nexo conceitual como o elo entre as formas de pensar o conceito, que não coincidem, necessariamente, com as diferentes linguagens do conceito (SOUSA, 2016, p. 96).

denomina de evolução. Com essas características, os nexos conceituais de função envolvem variação e movimento.

Nesse sentido, o problema que nos propomos estudar nesta pesquisa será investigado e fundamentado na teoria histórico-cultural, principalmente no ensino Desenvolvimental proposta por Davydov (1988), por entendermos que ela contém os fundamentos para organização de um ensino capaz de promover o desenvolvimento cognitivo dos alunos, pela apropriação de conceitos científicos, imprescindíveis à formação das funções mentais superiores.

No campo da pedagogia, tais orientações foram tratadas de um modo específico por Davydov (1988), que estabeleceu uma rica produção teórica sobre ensino-aprendizagem, a partir de outros teóricos da área. Particularmente, entendemos que o cerne de nossa proposta repousa no movimento do abstrato ao concreto, determinado pelas seis ações que sintetizam proposta de ensino de Davydov, para que o aluno compreenda os nexos conceituais referentes ao conceito de função (DAVYDOY, 1988).

O objetivo do artigo é fazer uma proposta de ensino do conceito de função baseada na teoria do ensino desenvolvimental de Davydov, de modo que essa proposta didática contemple os nexos conceituais do conteúdo de função que são: fluência, interdependência, variação e movimento. Tais nexos conceituais não são desenvolvidos no ensino tradicional, no qual o aluno não consegue assimilar o conceito de função em todos os seus aspectos que são a relação entre grandezas dadas no modelo aritmético, algébrico e gráfico.

Desse modo, no presente artigo, para apresentar a nossa investigação sobre o ensino de função utilizando a teoria do ensino desenvolvimental de Davydov, será composto pelos seguintes itens: primeiro abordaremos a história da função propriamente dita, buscando enfatizar o contexto histórico que foi desenvolvida, para em seguida apresentar os nexos conceituais inerentes a esse conteúdo, pelo movimento lógico-histórico. Por último, propomos uma possibilidade de ensino para o conceito de funções, baseada na teoria desenvolvimental de Davydov, no qual por meio do planejamento de atividades de estudo, visamos desenvolver nos alunos a compreensão

dos nexos internos e externos deste conceito por meio das ações na resolução das atividades propostas.

MOVIMENTO LÓGICO-HISTÓRICO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

O homem desde o começo teve a necessidade de conhecer os fenômenos da realidade que o cerca, aumentando seu poder de previsão de tais fenômenos, para dominar cada vez mais o mundo, fazendo com que as leis da natureza trabalhassem a seu favor. Caração (2003) destaca duas características principais para a mente humana compreender a realidade e os fenômenos naturais, que são a interdependência e a fluência.

Aristóteles, filósofo grego da antiguidade, deu atenção ao movimento (fluência), ainda que, sem observá-lo, deu-lhe uma definição qualitativa³, a qual posteriormente caiu por terra sendo desmentida pela observação. Essa resistência ao quantitativo⁴ reinou por 20 séculos na Europa. A partir de então, cientistas renascentistas concentraram-se na observação e na experimentação, com a riqueza de leis quantitativas.

Chaves e Carvalho (2004), apontam que a relação criada pelas civilizações antigas já desenvolvia implicitamente o que se chama de “instinto de funcionalidade”. Este instinto originado da necessidade do homem antigo em contabilizar sem ter o gozo de um sistema de contagem desenvolvido, fez com que surgisse as associações de objetos. Dentre as associações destacam: a quantificação pelos dedos ou a contagem do pastor, que para saber a quantidade de animais que tinham seu rebanho associavam cada ovelha com uma pedra.

³ Caração define qualidade “ao conjunto das relações em que um determinado ser se encontra com outros seres em um agregado, chamaremos as qualidades desse ser” (CARAÇA, 2003, pg. 106). Dados dois objetos A e B, entre eles existem relações de interdependência; a cada uma dessas relações corresponde uma qualidade de A em relação a B e uma qualidade de B em relação a A (Caração, p. 107). Por exemplo, sejam A e B duas espécies de animais das quais B se alimenta de A. A relação de A implica B significa para B uma fonte de conservação e a relação B implica A significa para A fonte de destruição.

⁴ A quantidade é um atributo da qualidade. A variação da quantidade pode ser suscetível ou não a medição (CARAÇA, 2003, p. 108).

De acordo com Souza e Mariani (S/N), conforme citado por Zuffi (2001), no qual expõe a utilização implícita de função dos Babilônios, isto devido à necessidade prática desta civilização. Eles calculavam as raízes quadradas de um número e registravam em tabelas sexagesimais de quadrados. Esta relação de valores contempla o instinto de funcionalidade. Os gregos segundo Kleiner (1989), utilizaram do instinto de funcionalidade em estudos geométricos referentes ao cálculo de áreas.

Vale ressaltar que na noção de função está especificada a ideia de variação. A noção de função só começou a ser desenvolvida pelos matemáticos com a introdução do simbolismo para estudar equações, preconizada por François Viète no século XVI, no qual introduziu as incógnitas por vogais e os coeficientes por consoantes. O método de resolver equações por métodos algébricos, herdada da matemática árabe, servia como um auxílio na resolução de problemas geométricos (ROQUE, 2012).

Um dos pioneiros da Idade Moderna foi o italiano Galileu Galilei (1564-1642), que preconizava o estudo da Matemática na descrição dos fenômenos da natureza. O conceito de variação para Galileu estava presente na relação entre grandezas físicas. No século XVII, uma das principais motivações para o estudo inicial de função é a ideia de trajetória, que associa o movimento a uma curva, que pode ser expressa por uma expressão analítica. Tal noção foi usada por Roberval no cálculo das tangentes (ROQUE, 2012) e por Descartes.

Um estudioso da modernidade que teve participações em várias áreas do conhecimento foi René Descartes (1596-1650). Sua participação na história vai desde o desenvolvimento do método científico a criação do plano cartesiano. Descartes destaca o papel da medida e da quantificação para a compreensão das leis naturais. Na matemática especificamente estabeleceu relação de dependência entre quantidades variáveis utilizando uma equação em x e y , para resolver problemas de indeterminação, isto é, que relacionam duas quantidades desconhecidas (ROQUE, 2012).

Leibniz associava curvas como expressões analíticas para resolver problemas de cálculo de tangentes e determinação de máximos e mínimos. Leibniz foi precursor da palavra função, apesar de não ser o responsável pela sua notação moderna. Ele

introduziu o conceito de inclinação da curva ou ponto específico da curva que é a base do cálculo infinitesimal, também conhecido como funções diferenciáveis. Leibniz já utilizava um conceito de função implicitamente, no qual ele relacionava as variáveis dependentes com as variáveis independentes. É importante destacar que a função diferenciável de Leibniz não atribuía o conceito de unicidade do domínio de uma função (SOUZA e MARIANI, S/N).

Apesar dos matemáticos trabalharem relações entre quantidades, não se teve uma definição que exprimisse a relação entre elas. Para Souza e Mariani, o Matemático Jean Bernoulli (1667-1748), fez a primeira definição de função, distinguindo entre função e o valor da função: “Uma função de um valor variável é uma expressão analítica, que é composta de valor variável e valores constantes” (*apud* BOYER, 2012, p. 307). Em sua definição ele não fala da unicidade da imagem sobre um domínio, mas o seu trabalho popularizou o conceito de função entre os matemáticos.

Posterior a definição de função proposta por Bernoulli, o matemático Leonhard Euler (1707-1783), teve grande representatividade na matemática. A partir de Euler, foi que a função começou a ser vista como uma teoria utilizada para resolver problemas de cálculo, no final do século XVIII. Euler apresentou o exemplo de função contendo raízes quadradas, para ele as funções só eram contínuas e não somente a forma de expressão analítica, mas também a curva traçada a mão livre, sem “cantos” (SOUZA E MARIANI, S/N). Ele associava funções como uma expressão analítica envolvendo variáveis, ideia que os alunos da educação básica atualmente possuem sobre o seu conceito. Euler definiu função como “uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de um modo qualquer dessa quantidade e de números, ou de quantidades constantes” (ROQUE, 2012, p. 374).

A Idade Contemporânea segundo alguns historiadores começou no ano de 1789 e vai até os dias atuais. Este período é marcado por transformações na sociedade devido a vários fatores que se interagem tais como: a continuidade da Revolução Industrial, o acontecimento das duas Grandes Guerras Mundiais, a criação da Internet, surgimento da Guerra Fria que desencadeou a corrida armamentista e espacial, como também o tipo de

relação internacional caracterizada pelo domínio e dependência, conhecido como Imperialismo.

Fourier (1768-1830) no estudo da série trigonométrica, trouxe uma inovação no modo de trabalhar funções, trazendo a necessidade de se prestar atenção a noção de intervalo, que é a possibilidade de variação da quantidade x . Fourier apresentava nessa noção, o domínio de uma função, que são os valores que a variável x pode assumir para a expressão analítica fazer sentido (ROQUE, 2012). Essa ideia de função diz que não podemos defini-la somente como uma expressão analítica, pois essa expressão não poderia fazer sentido se não fosse considerado o intervalo de variação de x .

A definição de Fourier escrita na sua obra sobre a teoria analítica do calor, publicada em 1822, é descrita do seguinte modo: “A função $f(x)$ representa uma sucessão de valores que são dados a abscissa de X , e existe um número igual de ordenadas $f(x)$. Não se supõe que essas ordenadas estejam sujeitas a uma lei comum; elas se sucedem uma a outra de um modo qualquer, e cada uma delas é dada como se fosse uma única quantidade” (ROQUE, 2012, p. 395). A definição de Fourier é mais geral, pois ela não se identificava somente com sua expressão analítica como definiu Euler e Bernoulli.

Cauchy para introduzir o curso de análise e suas aplicações em mecânica, para os alunos da Escola Politécnica na França, empregou novos conceitos teóricos como o de função e continuidade. Cauchy define função como ‘relação entre variáveis, de modo que o valor de uma delas infere-se no valor de outra, concebendo a noção de variável independente e dependente’ (ROQUE, 2012, p. 413).

Dirichlet, estudando as condições de integração de funções, publicou em 1829 um exemplo de uma função de modo que não pode ser dada por expressões analíticas, onde ela não é contínua, derivável e integrável. Tal exemplo motivou Dirichlet propor uma definição mais geral de noção de função, como está descrito em Roque (2012):

Sejam a e b dois números fixos e x uma quantidade variável que recebe sucessivamente todos os valores entre a e b . Se a cada x corresponde um único y , finito, de maneira que, quando x se move continuamente no intervalo entre a e b , $y=f(x)$ também varia progressivamente, então y é dita uma função contínua de x nesse intervalo. Para isso, não é obrigatório, em absoluto, nem que y dependa de x de acordo com a mesma e única lei, nem

mesmo que seja representada por uma relação expressa por meio de operações matemáticas (ROQUE, 2012, p.458).

Com a aritmetização da análise, com a caracterização de números reais feita por Dedekind e a teoria do conjunto estudada por Cantor, no final do século XIX, surge neste contexto, uma nova maneira de definir função, como uma correspondência unívoca entre dois conjuntos numéricos, no qual tal definição é a mais utilizada atualmente na educação básica.

A definição geral de função proposta por Dirichlet foi amplamente aceita até meados do século XX, sendo generalizada, cem anos mais tarde, por Bourbaki (1935- ?) e foi utilizada por muitos livros didáticos nas décadas de 70 em diante, pelos adeptos do movimento da matemática moderna. A axiomatização mais radical abrangendo todas as matemáticas é sem dúvida a de Bourbaki no qual, ele é apenas um personagem inventado por um grupo de matemáticos franceses, cuja ocupação era estudar e desenvolver teorias matemáticas. O nome dos criadores de Bourbaki são Henri Cartan, Elil Cartan, Claude Chevalley, Jean Delsart, Jean Dieu.

Dando maior ênfase a área da álgebra abstrata, a definição proposta em 1939 por Bourbaki utiliza a teoria dos conjuntos, que é expressa por: Sejam E e F dois conjuntos, no qual uma relação entre um elemento x de E e um elemento y de F é dita uma função, se para todo x pertencente a E , se existe um único y pertencente a F que possui a relação dada com x (ROQUE, 2012). Uma outra versão é que uma função é um subconjunto do produto cartesiano $E \times F$, isto é, uma função é somente um conjunto de pares ordenados (a, b) no qual a pertence a E e b pertence a F . Essa definição elimina todas as ideias de variação e movimento inerente ao conceito de função, onde uma função invés ao de ser entendida como uma variação de certa quantidade indeterminada, a variável passa a ser entendida como um elemento de um conjunto numérico (ROQUE, 2012).

O ENSINO DE FUNÇÃO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Todo esse movimento de pensamento, que descrevemos, revela traços muito expressivos acerca do processo de humanização assumido pela Teoria Histórico-Cultural. Segundo a Teoria Histórico-cultural, as necessidades assumem um papel de destaque. Nesse processo de relação homem-natureza e, conseqüentemente, transformação mútua com a natureza "o homem cria novas necessidades que passam a ser tão fundamentais para ele quanto as chamadas necessidades básicas à sua sobrevivência" (ANDERY, 1992, p. 12).

Sendo assim, o conceito de necessidade, originalmente biológico, transforma-se para o homem em necessidade histórico-cultural. Há necessidades de cunho biológico, mas há as que levam o homem a transcender ao seu atual estágio de desenvolvimento, onde são as necessidades que ele possui capacidade de criar. Algumas dessas necessidades podem ser observadas nos exemplos da seção anterior, especialmente aquela que se refere ao domínio sobre os fenômenos. Por conseguinte, a partir desta necessidade, o homem assume a intencionalidade de agir e de transformar a natureza, na busca de obter um domínio e segurança, bem como previsão e repetição dos fenômenos em benefício próprio (CARAÇA, 2003).

A definição que se apregoa nas escolas e nas universidades, infelizmente, tem sido ministrada como se os conceitos nascessem do nada, por pessoas isoladas, os quais estão prontos e acabados. Devemos buscar nos alunos, sujeitos cheios da intencionalidade de criar e de enverar novas necessidades. É assim que o homem modifica a natureza e a domina. Essas considerações nos levam a pensar sobre a forma como o ensino está organizado nas escolas e universidades.

Para compreendemos a relação de função, vimos que no movimento lógico-histórico, a definição desse conceito passou por vários estágios de desenvolvimento. No ensino tradicional, a definição de um conceito é trabalhada a partir do seu estágio atual de desenvolvimento, tendo como ponto de partida a teoria do conjunto, que tira toda a

noção de movimento, que aparece em situações físicas, que foi a gênese geral do conceito.

A definição trabalhada sem considerar o contexto social e histórico no qual estava inserido o conceito, ele aparece de forma estática e isolada, que não favorecem a aprendizagem dos nexos conceituais de função, causando um prejuízo de aprendizagem aos nossos alunos, principalmente aqueles que irão prosseguir os estudos na área de exatas.

O primeironexo que devemos atentar no conceito de função é a ideia de correspondência que relaciona duas quantidades, como por exemplo, tempo e distância, número de produto vendido e lucro total. Uma tabela que relaciona duas quantidades, onde o valor da 1º coluna corresponde ao seu elemento correspondente da 2º coluna é a ideia inicial de função.

Na BNCC (2017) recomenda-se trabalhar a ideia de função desde os primeiros anos do ensino fundamental, para os alunos irem se apropriando dos seus nexos conceituais, até chegar ao conceito final que é ministrado no 9º ano e no ensino médio. Uma atividade para trabalhar nos anos iniciais é o estudo de sequências numéricas, no qual um elemento do conjunto dos números naturais corresponde a um termo da sequência dada por uma lei geral ou recorrência.

Pode-se trabalhar a sequência dada pelo termo $a_n = n + 1$, no qual teremos uma correspondência entre o número natural e seu sucessor. Uma outra sequência que pode ser trabalhada são os números figurados, estudados por Pitágoras. Os números quadrados são dados pela sequência $a_n = n^2$, onde cada número natural corresponde ao seu quadrado. Outro aspecto que pode ser considerado no estudo de sequências é a noção de domínio e contradomínio, no qual o domínio de uma sequência corresponde aos números naturais.

O segundo aspecto a considerar é a noção de variável, ou seja, um símbolo que representa todos os elementos de um determinado conjunto, sem coincidir individualmente com nenhum deles (CARAÇA, 2003). É o início da generalização de uma lei ou fórmula, por exemplo, na sequência numérica dos números quadrados, é

impossível representar toda a correspondência em uma tabela, visto que podemos substituir essa tabela pela expressão simbólica $a_n = n^2$, com n número natural.

O terceiro aspecto é a noção de função definida como uma relação entre duas variáveis x e y pertencentes ao conjunto numérico. Dizemos que $y = f(x)$ é uma função entre as variáveis x e y se existe uma correspondência unívoca no sentido de $x \rightarrow y$, onde x representa a variável independente e y variável dependente. Neste caso, todo elemento do conjunto representado por x possui um único elemento do conjunto representado por y .

Com essa definição, há várias formas de representar a correspondência entre x e y , onde a mais utilizada no ensino tradicional é a expressão analítica e por sua representação geométrica. A expressão analítica é uma fórmula que liga as duas variáveis $x \rightarrow y$, expressando a correspondência que existe entre elas. Muitos alunos confundem o conceito de função com a sua representação analítica. Isso tem a ver com o vício de linguagem utilizado por nós professores e os livros didáticos, pois muitas vezes chamamos a função por $y = f(x)$, em vez de descrevê-la como a função expressa pela sua forma analítica $y = f(x)$.

A definição geométrica é que toda correspondência entre as variáveis $x \rightarrow y$, obtém-se pares ordenados (x, y) no plano cartesiano, no qual o conjunto desses pares ordenados, chamados de pontos, é um gráfico (curva) de uma função se toda reta paralela ao eixo y toca o gráfico da função somente uma vez (CARAÇA, 2003).

A curva é a imagem geométrica de uma função, dada pela relação $y = f(x)$. A curva dada pela linha contínua só foi possível representá-la, dessa forma rigorosamente, com a construção dos números reais, formulada por Dedekind (1876). Neste caso, Caraça (2003) argumenta que é a primazia do número sobre a figura geométrica, através da lei que representa as coordenadas dos pontos da curva, através de uma expressão analítica. Por exemplo, a circunferência de centro na origem e raio r é definida pelos pontos que satisfazem a equação $x^2 + y^2 = r^2$.

Outro aspecto a considerar é que a definição de função, dada por uma relação unívoca entre dois conjuntos, é expressa na maioria das vezes, por dois conjuntos

numéricos e a regra dada por uma expressão analítica. A sua definição é mais geral e pode englobar conjuntos que não sejam numéricos e a lei que relaciona esses conjuntos é arbitrária. Lima (2000) coloca o seguinte exemplo:

Sejam S o conjunto dos segmentos de reta do plano π e Δ o conjunto das retas desse mesmo plano. A regra que associa a cada segmento $AB \in S$ sua mediatriz $g(AB)$ define uma função $g: S \rightarrow \Delta$ [...] A regra que ensina obter $f(x)$ quando x é inteiramente arbitrário, sendo sujeita a apenas duas condições: a) não deve haver exceções, a fim de que a função f tenha o conjunto X como domínio, a regra deve fornecer $f(x)$, seja qual for $x \in X$ dado; b) Não pode haver ambiguidades: a cada $x \in X$, a regra deve fazer corresponder um único $f(x)$ em Y (LIMA, 2000, p. 40).

No exemplo acima, a cada segmento de reta no conjunto S , está associado um único elemento de Δ , que é a mediatriz do segmento. Neste caso, todo segmento de reta possui uma única mediatriz. A relação não envolve conjuntos numéricos e nem uma expressão analítica, mas esta relação satisfaz o conceito de função. No próximo item, será elaborada uma proposta de atividade que contemple os nexos conceituais internos e externos de função utilizando a teoria do ensino desenvolvimental de Davydov.

ATIVIDADE DE ENSINO REFERENTE AO CONCEITO DE FUNÇÃO UTILIZANDO A TEORIA DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL DE DAVYDOV

Em nossa tradição escolar, geralmente o professor apresenta esse conhecimento científico de forma descritiva. Mas isso para Davydov (1988) é insuficiente. É necessário que a atividade ative e estimule a capacidade de pensar, sendo capaz de, a partir de uma situação planejada, permitir que o aluno entenda o seu porquê. Para ensinar funções, a atividade deve permitir ao aluno compreender essencialmente porque o matemático define função daquela forma. Portanto, o movimento lógico-histórico do conceito ajudará a explicá-lo e a atividade proposta deve ser planejada incluindo esse pressuposto, além de permitir ao aluno apropriá-lo.

O professor deve buscar o princípio geral do objeto, com a finalidade de que o aluno compreenda esse princípio, inicialmente aplicando-o a situações particulares. Esta deve permitir o aluno acessar o núcleo do objeto. Isso é algo plausível e importante para

o ensino da Matemática, pois os objetos matemáticos possuem núcleos e essências bem definidas e também uma história, sendo um trabalho possível no contexto escolar.

Segundo Davydov, *apud* Peres e Freitas (2014, p. 10), a atividade de aprendizagem é a organização e proposição, pelo professor, de um conjunto de tarefas que poderão levar o aluno a formar em sua mente diversos conceitos que, inter-relacionados, compõem um dos conteúdos de uma determinada área do conhecimento a ser apreendido. O professor, ao considerar as características psicológicas, culturais e sociais de seus alunos, proporá atividades integradoras de modo a levar em consideração a transformação do pensamento empírico de seu aluno em pensamento científico. A atividade deve ser o elo entre esses dois mundos (DAVYDOV, 1988).

O objetivo da atividade de ensino é fazer com que os alunos assimilem os nexos conceituais referentes ao conceito de função, que se relaciona aos conceitos de variações entre grandezas (variáveis), dependência, interdependência, relação, representações analítica e geométrica, e conjuntos do domínio e contradomínio. A atividade não é um simples exercício de resolução prática, mas sim a construção do pensamento de movimento que as variáveis apresentam, forçando ao aluno refletir sobre o conceito de função sem adentrar em sua definição formal e sistematizada.

A atividade proposta foi desenvolvida pelos alunos do curso de Matemática, modalidade Licenciatura, da Universidade Estadual de Goiás, na disciplina História da Matemática, cuja intenção é planejar atividades de matemática utilizando o movimento lógico-histórico para se chegar ao núcleo conceitual de conteúdos matemáticos. O objetivo é realizar uma atividade em que enfatizasse o conceito de função, no qual é perceber a relação de dependência entre uma variável com outra, extraindo assim a concepção do nexo interno para posteriormente concretizar o nexo externo.

Para motivar a construção do conceito de função, a atividade proposta que reproduz o conceito nuclear do objeto de estudo foi o seguinte problema gerador: “Em uma loja de roupas, compra-se camisetas pelo preço de custo de R\$ 20,00 e revende essas camisetas pelo preço de R\$ 30. Tendo em vista que, no primeiro mês do ano, a loja vendeu 20 unidades, e nos meses seguintes houve um aumento de 5 unidades por

mês, e sabendo que a loja paga um transporte de R\$ 20 por mês para que as camisas sejam entregues, preencha uma tabela que relaciona as grandezas envolvidas nesta situação”.

Tabela 1- Relação de lucro, quantidade vendida e lucro total.

Tabela de vendas	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul
Lucro de 1 camiseta							
Quantidade vendida							
Lucro Total							

Fonte- Acervo próprio.

A partir desse momento serão realizadas diversas perguntas aos alunos com a finalidade de instigar, motivar, interagir direcionando-os para a construção do conceito de função. As perguntas que vão direcionar os alunos são:

- 1) Quais são as grandezas envolvidas nesta situação?
- 2) Observando a tabela o que acontece de um mês para o outro?
- 3) Nessas grandezas que variam, existe alguma relação entre elas? Tente representar essa relação a partir de uma frase.
- 4) Agora tente representar de forma simbólica
- 5) Represente os valores encontrados na tabela no plano cartesiano
- 6) As quantidades de camisas vendidas estão em qual conjunto numérico? E o lucro?

- 7) Porque este gráfico só pode ser representado em pontos?
- 8) Existe alguma outra relação funcional?

Para realização da atividade pede-se que a turma se divida em grupos. Depois do término da atividade será discutido cada alternativa da mesma, expondo a construção do conceito de função a todos, isto é, os nexos internos, que representam o objetivo da atividade de ensino e que através destes nexos chegamos à formalização do conceito de função.

CONCLUSÃO

O presente artigo pretendeu analisar como o conceito de funções se desenvolveu historicamente, partindo das necessidades dos homens e na medida em que o homem aprendeu a transformar a natureza, faz-se crescer a sua inteligência, o homem coloca a natureza exterior através das suas transformações ao serviço dos seus fins. Com o tempo o estudo de funções se transformou de uma ciência empírica ou experimental a uma ciência dedutiva e abstrata, que foi evoluindo de maneira gradual até chegar ao seu conceito formal. A relação dialética entre vida ativa e pensamento abstrato é o motor do desenvolvimento dos conceitos Matemáticos.

O olhar da teoria lógico-histórica da formação do conceito de funções, aqui apresentada, trabalha para que os professores compreendam como determinados conteúdos foram desenvolvidos ao longo do tempo e, ao juntar este conhecimento com o desenvolvimento lógico atual deste mesmo conteúdo, possa criar propostas de ensino que trabalhem situações desencadeadoras de aprendizagem que utilizem, implicitamente, a Epistemologia e a História da ciência ensinada.

Para efetivar a proposta de ensino, foi realizada uma análise do conteúdo, identificando a relação geral básica e as relações particulares que compõem o conceito de funções. Assim, a partir dessa análise, se buscou propor o movimento do pensamento

dos alunos e espera-se que eles se apropriem desse conceito como uma “ferramenta” de pensamento e análise em diversos contextos e situações particulares.

Ao realizar este trabalho, acredita-se ter propiciado avanços nas produções de conhecimentos no campo da didática, oferecendo subsídios teóricos e metodológicos que auxiliem os professores a atuarem nos processos de ensino e aprendizagem. Este trabalho teve como pretensão também auxiliar os professores que queiram conhecer e/ou tentar colocar em prática esta metodologia de ensino, mas que não tem uma ideia inicial ou, até mesmo, que possa contribuir na implementação do conhecimento acerca deste tema, trazendo novas visões e novos instrumentos que darão maior qualidade ao ensino de matemática.

REFERÊNCIAS

ANDERY, M. A., MICHELETTO, N. M., SERIOR, T. M. P., RUBANO, D. R., MOROZ, M., PEREIRA, M. E. (1992). Para compreender a ciência: uma perspectiva histórica (4ª ed.). Rio de Janeiro: Espaço e Tempo; São Paulo: EDUC.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 3º ed. São Paulo: Blucher, 2012.

CARAÇA, Bento de Jesus, **Conceitos Fundamentais Da Matemática**. 5º ed. Lisboa. 2003.

CHAVES, M. I. de A., CARVALHO, H. C. **Formalização do Conceito de Função no Ensino Médio**: Uma Sequência de Ensino-Aprendizagem. VII Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife, Anais, pp.1 – 18, 2004.

DAVYDOV, V. V. **Problemas do ensino desenvolvimental - a experiência da pesquisa teórica e experimental na psicologia**. Tradução de José Carlos Libâneo e Raquel A. M. da Madeira Freitas, 1988.

KLEINER, I. **Evaluation of the Function Concept**: a Brief Survey. In: College Mathematics Journal. USA: 1989. no 20

LIBÂNEO, José. C.; FREITAS, Raquel, A. M.M. Vygotsky, Leontiev, Davídov: **contribuições da teoria histórico-cultural para a didática**. In: SILVA, C. C.; SUANNO, M. V. R. (orgs.) Didática e interfaces. Rio de Janeiro/Goiânia: Descubra, 2007.

LIBÂNEO, José Carlos. **Ensinar e aprender, aprender e ensinar: o lugar da teoria e da prática em didática.** In: Libâneo, José C.; Alves, Nilda. (Org.). Temas de pedagogia: diálogo entre currículo e didática. 1ed. São Paulo: Cortez, 2012a, v. 1, p. 35-60.

LIBÂNEO, José Carlos. **O dualismo perverso da escola pública brasileira: escola do conhecimento para os ricos, escola do acolhimento para os pobres.** Educação e Pesquisa, Porto Alegre, março 2012b, vol. 38, nº 1, p. 13-28. SCIELO.

LIBÂNEO, José Carlos; SILVA, Maria Abadia da e CUNHA, Celso da (orgs). **Internacionalização das políticas educacionais: elementos para uma análise pedagógica de orientações curriculares para o ensino fundamental e de propostas para a escola pública na Educação Básica: políticas, avanços, pendências.** Campinas (SP): Autores Associados, 2014.

_____. **A teoria do ensino para o desenvolvimento humano e o planejamento de ensino.** Educativa, Goiânia, v. 19, n. 2, p. 353-387, maio/ago. 2016.

ROQUE, Tatiana, **História da Matemática.** Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Zahar. 2012.

SOUSA, M. do C. de; MOURA, M. O. de. **O movimento lógico-histórico em atividades de ensino de matemática: unidade dialética entre ensino e aprendizagem.** XII ENEM. São Paulo – SP, 13 a 16 de julho de 2016.

SOUZA, V. Dal M. de; MARIANI V. C. M. **Um breve relato do desenvolvimento do conceito de função.**

ZUFFI, E. **Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função.** Educação Matemática em Revista, 8, no 9/10, Abril, 2001.